



|빠|른|정|답|찾|기|

알찬 풀이



01 삼각함수의 덧셈정리와 삼각방정식

0001 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	0002 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$			
0003 $2+\sqrt{3}$	0004 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0005 $-\frac{1}{2}$	0006 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	
0007~0008 풀이 8쪽	0009 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$			
0010 풀이 8쪽	0011 $2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$			
0012~0018 풀이 9, 10쪽	0019 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$			
0020 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	0021 $2-\sqrt{3}$	0022~0024 풀이 10쪽		
0025 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	0026 $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$	0027 $\frac{1}{4}$		
0028 $\frac{1}{4}$	0029 $\frac{\sqrt{6}}{2}$	0030 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0031 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
0032 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0033~0038 풀이 11쪽			
0039 ③	0040 ⑤	0041 ①	0042 ⑤	0043 ①
0044 ④	0045 ④	0046 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	0047 5	0048 ④
0049 $-\frac{4}{5}$	0050 ②	0051 ②	0052 ③	0053 ①
0054 ③	0055 60°	0056 ②	0057 ②	0058 ③
0059 ⑤	0060 ④	0061 ③	0062 ④	0063 ①
0064 $6\sqrt{2}$	0065 $\frac{4\sqrt{5}}{9}$	0066 ②	0067 ②	0068 ⑤
0069 $-\frac{15}{16}$	0070 ①	0071 ①	0072 $\frac{2}{11}$	0073 ①
0074 ④	0075 ③	0076 ⑤	0077 ③	0078 ①
0079 ①	0080 ④	0081 ③	0082 ③	0083 ①
0084 ①	0085 ⑤	0086 ③	0087 ③	0088 $\frac{1}{2}$
0089 8	0090 ①	0091 ④	0092 $-\frac{1}{4}$	0093 $\frac{3}{2}$
0094 ③	0095 ③	0096 0	0097 $\sqrt{3}$	0098 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
0099 $\frac{1}{2}$	0100 ①	0101 $\frac{2}{3}\pi$	0102 ③	0103 ③
0104 ④	0105 ③	0106 ②	0107 ③	0108 ④
0109 $\frac{5}{2}\pi$	0110 4	0111 ③	0112 ①	0113 ④

0114 4 0115 ③ 0116 ③ 0117 $\frac{9}{2}\pi$

0118 ③ 0119 ② 0120 ① 0121 ④ 0122 ③

0123 ③ 0124 ③ 0125 ④ 0126 2 0127 ⑤

0128 4 0129 $\frac{\pi}{2}$ 0130 9

02 함수의 극한

0131 0	0132 0	0133 -2	0134 1	0135 $\frac{1}{2}$
0136 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0137 2	0138 $\frac{3}{2}$	0139 $-\frac{1}{3}$	0140 3
0141 $\frac{\pi}{180}$	0142 3	0143 1	0144 -3	0145 0
0146 0	0147 발산	0148 -1	0149 발산	0150 발산
0151 발산	0152 $\frac{1}{e}$	0153 $e^{\frac{3}{2}}$	0154 e	0155 e^3
0156 $\frac{1}{e}$	0157 $\ln 10$	0158 $-\frac{1}{2}\ln 2$	0159 $\frac{1}{2}$	
0160 $-\ln 2-1$	0161 $\ln 6$	0162 $\ln 2+1$		
0163 발산	0164 $\frac{1}{e}$	0165 발산	0166 $\ln 2$	
0167~0168 풀이 26쪽	0169 $\frac{1}{5}$	0170 $-\frac{3}{\ln 3}$		
0171 -1	0172 $\ln\sqrt{2}$			
0173 ③	0174 ②	0175 0	0176 4	0177 $-\frac{1}{4}$
0178 ②	0179 1	0180 ⑤	0181 ②	0182 ①
0183 ⑤	0184 $\frac{1}{4}$	0185 ④	0186 ③	0187 ⑤
0188 ①	0189 $\frac{\pi}{90}$	0190 ④	0191 ④	0192 ⑤
0193 ①	0194 ①	0195 ⑤	0196 ④	0197 ②
0198 ②	0199 6	0200 ③	0201 $-\frac{\pi}{2}$	0202 ⑤
0203 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0204 1	0205 ②	0206 ②	0207 ①
0208 ⑤	0209 6	0210 ①	0211 ①	0212 2
0213 ⑤	0214 1	0215 4	0216 ③	0217 1

0218 ②	0219 ①	0220 ⑤	0221 ⑤	0222 ②
0223 $\frac{1}{e^2}$	0224 ④	0225 ④	0226 ③	0227 $\frac{1}{2}$
0228 2	0229 ⑤	0230 ④	0231 ①	0232 ④
0233 ③	0234 ⑤	0235 ⑤	0236 $\frac{1}{2}$	0237 ②
0238 2	0239 ②	0240 ④	0241 ②	0242 -2
0243 ①	0244 ③	0245 ④	0246 ④	0247 6
0248 ④	0249 ④	0250 ⑤	0251 ②	0252 ①
0253 5	0254 ⑤	0255 ④	0256 $\frac{1}{\ln 5}$	0257 ④
0258 ⑤	0259 ③	0260 ②	0261 ⑤	0262 ②
0263 ④	0264 π	0265 ③	0266 12	0267 ⑤
0268 ④	0269 ②	0270 ③	0271 $\frac{2}{3}$	
0272 ②	0273 ①	0274 ②	0275 2	0276 ④
0277 ③	0278 ⑤	0279 ③	0280 ⑤	0281 ②
0282 ⑤	0283 ③	0284 31	0285 1	0286 5

03 여러 가지 함수의 미분법

0287 $y' = \frac{13}{(3x+2)^2}$	0288 $y' = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$	
0289 $y' = -\frac{1}{(x-2)^2}$	0290 $y' = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$	
0291 $y' = -\frac{1}{x^2}$	0292 $y' = \frac{3}{x^4}$	0293 $y' = 9x^2 - \frac{10}{x^6}$
0294 $y' = 10(2x+1)^4$	0295 $y' = 2(5x^2-3x+1)(10x-3)$	
0296 $y' = \frac{4}{(3-x)^5}$	0297 $y' = -2(-2x+1)(4x^2-x+2)$	
0298 $y' = \frac{x^2-6x+7}{(x^2-3x+2)^2}$	0299 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$	
0300 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$	0301 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$	0302 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$
0303 $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2-2y}{2x-2y}$	0304 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	0305 $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
0306 $y' = -\frac{2}{3^3\sqrt{x^5}}$	0307 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{2}x\sqrt{x}$	

0308 $y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$	0309 $y' = \frac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}}$	0310 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}$		
0311 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3}$	0312 ③	0313 $\frac{dy}{dx} = 2t$		
0314 $\frac{dy}{dx} = -3t^4$	0315 $\frac{dy}{dx} = 16\sqrt{t}(2t+1)^3$			
0316 $y' = \cos x - 2 \sin x$	0317 $y' = \sec x \tan x + \operatorname{cosec} x \cot x$			
0318 $y' = 2 \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$	0319 $y' = 2x \cos(x^2-1)$			
0320 $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sec^2 \sqrt{1-x^2}$	0321 $y' = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$			
0322 $y' = x(2 \cos x - x \sin x)$	0323 $y' = \sec x(2 \sec^2 x - 1)$			
0324 $y' = \frac{2 \sin x}{(1+\cos x)^2}$	0325 $y' = -5 \sin x(1+\cos x)^4$			
0326 $y' = \sin^2 x \cos x(3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x)$	0327 $y' = -\frac{\cos x}{\sqrt{1-2 \sin x}}$			
0328 $y' = 2e^{2x}$	0329 $y' = e^x + xe^x$			
0330 $y' = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$	0331 $y' = 3(x^2+e^x)^2(2x+e^x)$			
0332 $y' = 3 \cdot 2^x \ln 2$	0333 $y' = 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 \cdot 2x$			
0334 $y' = 4 \cdot 3^x(x \ln 3 + 1)$	0335 $y' = \frac{2(1-x \ln 3)}{3^x}$			
0336 $y' = \frac{1}{x}$	0337 $y' = \ln 3x + 1$			
0338 $y' = \frac{1-x \ln x}{xe^x}$	0339 $y' = 2(\ln x - 2x + 1)\left(\frac{1}{x} - 2\right)$			
0340 $y' = \frac{2}{x \ln 10} - 1$	0341 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$			
0342 $y' = -\frac{1}{x \ln 10(\log 2x)^2}$	0343 $y' = \frac{2 \log_3 x}{x \ln 3}$			
0344 풀이 43쪽	0345 $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$			
0346 $y' = -\frac{e}{x^{e+1}}$	0347 $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$			
0348 $y'' = -4 \sin 2x$	0349 $y'' = 9e^{-3x}$	0350 $y'' = -\frac{1}{x^2}$		
0351 ①	0352 $y' = \frac{3x^2-4x}{(3x-2)^2}$	0353 ①	0354 7	
0355 ⑤	0356 1	0357 ②	0358 ④	0359 ④
0360 ②	0361 ⑤	0362 ③	0363 1	0364 ③
0365 -18	0366 ⑤	0367 ①	0368 ①	0369 ③
0370 6	0371 ①	0372 ③	0373 $\frac{1}{6}$	0374 ④
0375 ①	0376 ③	0377 ③	0378 ②	0379 $\frac{1}{2}$



0380 ④	0381 ③	0382 ①	0383 ④	0384 8
0385 ⑤	0386 ①	0387 3π	0388 2	0389 6
0390 ⑤	0391 -2	0392 ①	0393 ②	0394 ⑤
0395 ④	0396 ③	0397 ③	0398 ⑤	0399 ②
0400 ④	0401 ⑤	0402 ③	0403 ⑤	0404 ⑤
0405 ②	0406 ⑤	0407 ②	0408 ⑤	0409 ④
0410 $-\frac{2}{\pi}$	0411 ③	0412 ⑤	0413 ②	0414 ①
0415 $\frac{5}{4}$	0416 ③	0417 ③	0418 55	0419 2
0420 ①	0421 $y' = \frac{(2x^2+13x+17)(x+1)^2}{(x+3)^3}$			0422 ⑤
0423 ④	0424 ④	0425 ④	0426 ④	0427 ②
0428 3	0429 ①	0430 ④	0431 ②	0432 ④
0433 $\frac{3}{4}$	0434 ②	0435 ②		
0436 ④	0437 ③	0438 ③	0439 ③	0440 ①
0441 ③	0442 ④	0443 ⑤	0444 ④	0445 ②
0446 ④	0447 ②	0448 1	0449 1	
0450 $y'' = x^{x-1} + (\ln x + 1)^2 x^x$		0451 65		

04 도함수의 활용 (1)

0452 $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$	0453 $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$
0454 $y = ex$	0455 $y = \frac{1}{2}x + \ln 2$
	0456 $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$
0457 $y = x + 2$	0458 $y = \frac{16}{9}x + \frac{25}{9}$
0459 $y = \frac{\sqrt{2}}{3}x - 1$	0460 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
0461 $y = x + \frac{1}{4}$	0462 $y = 2x - \frac{\pi}{2}$
0463 $y = 3x - 2$	0464 $y = \frac{1}{10\ln 10}x - \frac{1}{\ln 10} + 1$
0465 $y = -x + 2$	0466 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$

0467 $y = 2ex$	0468 $y = \frac{1}{e^2}x + 1$			
0469 $\frac{a+b}{2}$	0470 4	0471 $\frac{5}{3}$	0472 $\frac{\pi}{2}$	
0473 $\sqrt{3}$	0474 5	0475 $\sqrt{3}$	0476 $\ln \frac{e^2-1}{2}$	
0477 $e-1$	0478~0481 풀이 57, 58쪽			0482 -2
0483 $\frac{1}{4}$	0484 $\frac{e}{2}$	0485 $\frac{1}{\ln 10}$		0486 0
0487 발산	0488 0	0489 발산	0490 0	0491 1
0492 3	0493 $y = x - 1$	0494 ⑤	0495 ④	
0496 ③	0497 ④	0498 ③	0499 ③	0500 ⑤
0501 ①	0502 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0503 ①	0504 ①	0505 $-2e$
0506 ⑤	0507 $\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$		0508 ①	0509 ②
0510 ②	0511 ④	0512 $y = \frac{e^2}{4}x$		0513 ④
0514 ①	0515 $a < -4$ 또는 $a > 0$	0516 ⑤	0517 2	
0518 ⑤	0519 ①	0520 ③	0521 $\frac{7}{4}$	0522 ③
0523 ②	0524 ②	0525 2	0526 0	0527 ②
0528 ①	0529 $\frac{\sqrt{21}}{3}$	0530 ③	0531 ②	
0532 $\frac{1}{10} < k < 1$	0533 ②	0533 3	0535 ⑤	
0536 ⑤	0537 ②	0538 ④	0539 ④	0540 ③
0541 $\frac{1}{2}$				

0542 ④	0543 $\frac{8}{9}$	0544 ②	0545 ①	0546 4
0547 ②	0548 ④	0549 ④	0550 8	0551 ④
0552 ②	0553 ②	0554 2	0555 $e-1$	
0556 $a=2, b=12$ 또는 $a=3, b=28$				

05 도함수의 활용 (2)

0557~0560 풀이 69쪽	0561 극대값 $\frac{1}{3}$, 극소값 -1
------------------	-----------------------------------

0562 극대값 $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ 0563 극소값 $-\frac{1}{2e}$

0564 극대값 $\frac{1}{e}$ 0565 극대값 -4 , 극소값 4

0566 극대값 1 0567 극소값 $-\sqrt{2}$

0568 극대값 $\frac{3}{e^2}$, 극소값 $\frac{1}{e}$ 0569 극소값 $-\frac{1}{2e}$

0570 최대값 35 , 최소값 19 0571 최대값 2 , 최소값 0

0572 최대값 $\frac{\pi}{2}$, 최소값 $-\frac{3}{2}\pi$

0573 최대값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 최소값 0

0574 최대값 e , 최소값 $-\frac{1}{e}$ 0575 최대값 1 , 최소값 $\frac{1}{e^4}$

0576 최대값 $2e-1$, 최소값 $1+\ln 2$

0577 최대값 e , 최소값 $-\frac{1}{e}$

0578 ④ 0579 ② 0580 ① 0581 ④ 0582 ③

0583 ⑤ 0584 ③ 0585 ④ 0586 ⑤ 0587 ⑤

0588 ③ 0589 $2\sqrt{2}$ 0590 $\frac{4}{9}$ 0591 ① 0592 ②

0593 ③ 0594 ① 0595 ② 0596 2 0597 ①

0598 1 0599 ③ 0600 ⑤ 0601 ② 0602 ②

0603 ① 0604 ① 0605 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 0606 ② 0607 ④

0608 ③ 0609 ② 0610 ③ 0611 ⑤ 0612 ②

0613 ① 0614 ③ 0615 $3\sqrt{6}-2$ 0616 21

0617 ③ 0618 ④ 0619 ④ 0620 ① 0621 ⑤

0622 ④ 0623 -1 0624 ② 0625 2 0626 e^5

0627 ③ 0628 $\frac{1}{2e}$ 0629 3 0630 ② 0631 ①

0632 $\frac{\pi}{4}$ 0633 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 0634 ④ 0635 ⑤ 0636 ④

0637 2

0638 ③ 0639 ⑤ 0640 $\frac{2}{\pi}$ 0641 ④ 0642 ①

0643 ③ 0644 $1+\sqrt{3}$ 0645 ⑤ 0646 ④

0647 ④ 0648 ② 0649 2π 0650 20 0651 $\frac{1}{2}$

06 도함수의 활용(3)

0652 ~0656 풀이 84쪽 0657 (1, 0)

0658 $(-1, 2)$, $(1, 8)$ 0659 $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{3}{4})$

0660 $(-1, 0)$ 0661 $(\frac{\pi}{2}, 0)$

0662 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{9}+2)$ 0663 $(-2, -\frac{2}{e^2})$

0664 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$

0665~0673 풀이 85~87쪽 0674 1 0675 2

0676 0 0677~0679 풀이 87, 88쪽 0680 2

0681 -1 0682 -1 0683 2 0684 $v=-1$, $a=1$

0685 $\vec{v}=(2, 4)$ 0686 $\vec{v}=(-\sin 2, \cos 2)$ 0687 1

0688 $\vec{a}=(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $|\vec{a}|=1$

0689 ① 0690 ③ 0691 ③ 0692 2 0693 ④

0694 ① 0695 $\frac{2}{e^2}$ 0696 ① 0697 -3 0698 ③

0699 ③ 0700 5 0701 ① 0702 ③ 0703 ④

0704 ① 0705 13 0706 $k>2$ 0707 6 0708 ⑤

0709 ② 0710 12 0711 $0<a<\frac{1}{2e}$ 0712 ②

0713 ③ 0714 ③ 0715 ① 0716 12

0717 $a\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 0718 $k\leq -2$ 0719 ②

0720 ① 0721 ① 0722 ⑤ 0723 ⑤ 0724 ④

0725 $\frac{\pi}{3}$ 0726 2 0727 ③ 0728 ③ 0729 ⑤

0730 ④ 0731 ② 0732 ③ 0733 ⑤ 0734 ④

0735 ③ 0736 $\frac{3}{2}$ 0737 18 0738 ②

0739 $\sqrt{2}+1$ 0740 4 0741 ④ 0742 ⑤ 0743 ④

0744 ① 0745 -8 0746 ① 0747 ③ 0748 3

0749 ④ 0750 ③ 0751 ② 0752 ④ 0753 5

0754 ① 0755 ④ 0756 ⑤ 0757 ③ 0758 ②

0759 ⑤ 0760 $k>\frac{27}{4}$ 0761 $\frac{3}{8\pi}$ 0762 1



07 부정적분

0763 $f(x) = 4 \cos x + \sin x$

0764 $f(x) = -e^{-x}$

0765 $f(x) = \frac{2}{x} + 3x^2$

0766 $3 \ln |x| + C$

0767 $-\frac{1}{x} + C$

0768 $\frac{3}{5}x^3\sqrt{x^2} + C$

0769 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

0770 $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C$

0771 $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$

0772 $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$

0773 $-2 \cos x + 4 \sin x + C$

0774 $-3 \operatorname{cosec} x - x + C$

0775 $x + \sec x + C$

0776 $2 \tan x - x + C$

0777 $x - 3 \cot x + C$

0778 $\tan x - x + C$

0779 $-\cot x - x + C$

0780 $3e^x + \frac{2^x}{\ln 2} + C$

0781 $e^{x+2} + C$

0782 $\frac{3^x}{\ln 3} + 4 \ln |x| + C$

0783 $\frac{1}{16}(4x-1)^4 + C$

0784 $\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$

0785 $-\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x} + C$

0786 $\frac{1}{2} \sin(2x-1) + C$

0787 $-e^{-x+1} + C$

0788 $\frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$

0789 $\sqrt{x^2-1} + C$

0790 $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

0791 $e^{x^2} + C$

0792 $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

0793 $\frac{1}{2} \ln(x^2+3) + C$

0794 $\ln(x^2-x+2) + C$

0795 $\ln |\tan x| + C$

0796 $\ln |\sec x| + C$

0797 $\ln |e^x-1| + C$

0798 $\frac{1}{2}x^2 + x + 5 \ln |x-1| + C$

0799 $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

0800 $\ln |(x+1)(x-3)^2| + C$

0801 풀이 103쪽

0802 $xe^x - e^x + C$

0803 $x \sin x + \cos x + C$

0804 $x \ln x - x + C$

0805 ④

0806 ②

0807 ⑤

0808 ⑤

0809 ④

0810 $\frac{7}{3}$

0811 ③

0812 ④

0813 1

0814 ④

0815 $\frac{3}{2}\pi$

0816 $\frac{\pi}{2} - 1$

0817 ①

0818 $3\left(\frac{1}{e}-1\right)$

0819 ①

0820 $\frac{1}{2}$

0821 ②

0822 $\frac{10}{\ln 3}$

0823 ④

0824 ②

0825 ①

0826 ④

0827 ⑤

0828 ③

0829 ①

0830 ③

0831 $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

0832 ④

0833 ④

0834 ②

0835 ②

0836 ⑤

0837 ④

0838 ②

0839 $\ln 3$

0840 ⑤

0841 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1, g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$

0842 ①

0843 ②

0844 ③

0845 ①

0846 ④

0847 $\ln 2$

0848 $-\frac{1}{3}$

0849 ⑤

0850 ⑤

0851 -2

0852 $-\frac{1}{2}$

0853 $\frac{1}{2}$

0854 ③

0855 $\frac{5}{e}$

0856 1

0857 ③

0858 ②

0859 ③

0860 2

0861 ①

0862 ③

0863 ②

0864 ③

0865 ⑤

0866 ②

0867 ④

0868 $F(x) = \tan x - \sec x + C$

0869 -1

08 정적분

0870 $\frac{14}{3}$

0871 $\frac{3}{4}(2^3\sqrt{2}-1)$

0872 $\frac{1}{2}$

0873 1

0874 $3 \ln 2 + \frac{3}{8}$

0875 $2 \ln 2 - \ln 3$

0876 2

0877 2

0878 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

0879 $\frac{1}{2}(e^2-1)$

0880 $\frac{3}{\ln 2}$

0881 2

0882 $\frac{2}{3}$

0883 $2\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$

0884 2

0885 $\frac{1}{e} + e - 2$

0886 68

0887 $\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$

0888 $\frac{9}{2}$

0889 $\frac{1}{4} \ln 3$

0890 $\frac{8}{3} - \sqrt{3}$

0891 $\frac{1}{4}$

0892 $\frac{2}{3}$

0893 $\frac{1}{2}(e^4-1)$

0894 $\frac{1}{2}$

0895 $\frac{\pi}{4}$

0896 $\frac{\pi}{2}$

0897 $\frac{\pi}{3}$ 0898 $\frac{\pi}{8}$ 0899 1 0900 e^2+1 0901 1
 0902 $x^2 \sin x$ 0903 $e^x(e-1)$
 0904~0906 풀이 116쪽 0907 1 0908 $e+2$ 0909 $\ln 2$
 0910 $\frac{2}{\pi}$
0911 ④ 0912 ② 0913 ④ 0914 ① 0915 ④
 0916 ① 0917 $\frac{\pi}{2}$ 0918 ③ 0919 $\frac{\pi}{4}$ 0920 ②
 0921 ⑤ 0922 ③ 0923 8 0924 $\frac{2}{\ln 2} + \ln 2$
 0925 ③ 0926 ① 0927 ⑤ 0928 ③ 0929 $2\ln 7$
 0930 ② 0931 $\frac{2}{3}$ 0932 ③ 0933 ②
 0934 $2(e^4-1)$ 0935 ② 0936 ③ 0937 ②
 0938 ① 0939 1 0940 ③ 0941 ② 0942 ③
 0943 $\frac{\pi}{4}$ 0944 ① 0945 ⑤ 0946 $\frac{\pi}{4}$ 0947 ①
 0948 ② 0949 ⑤ 0950 0 0951 1 0952 ①
 0953 ① 0954 ① 0955 $\frac{4}{3}$ 0956 ② 0957 ①
 0958 ② 0959 ② 0960 ① 0961 ⑤ 0962 ②
 0963 -1 0964 ⑤ 0965 $e-4$ 0966 ③ 0967 ⑤
 0968 $\frac{e}{2}$ 0969 ② 0970 ① 0971 ③ 0972 ②
 0973 $\frac{e^4-1}{4}$ 0974 ④ 0975 ③ 0976 2
0977 ③ 0978 ⑤ 0979 ① 0980 2 0981 ①
 0982 ④ 0983 ⑤ 0984 ④ 0985 1 0986 ③
 0987 ③ 0988 ① 0989 $\ln \frac{3}{2}$ 0990 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$ 0991 3
 0992 $1-\pi$ 0993 $-\frac{e^2+1}{8}$

09 정적분의 활용

0994 $\frac{16}{3}$ 0995 $\ln 3$ 0996 2 0997 $2(e^2 - \frac{1}{e})$

0998 $2+\ln 3$ 0999 $\frac{8}{3}$ 1000 1
 1001 $e - \frac{1}{e} + 2$ 1002 $\frac{1}{3}$ 1003 $\sqrt{2}-1$
 1004 $4\ln 2-2$ 1005 $e - \frac{3}{2}$
 1006 $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 1007 $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^8}) \text{ cm}^3$ 1008 $\frac{3}{5}\pi$
 1009 $\frac{\pi^2}{4}$ 1010 $\frac{3}{5}\pi$ 1011 $\frac{\pi}{2}(e^6-1)$ 1012 $\frac{\pi}{2}$
 1013 $\frac{\pi}{3}(e^3-4)$ 1014 (1) $\frac{2}{\pi}$ (2) 0 (3) $\frac{4}{\pi}$ 1015 $\sqrt{5}$
 1016 1 1017 $\frac{7}{3}$ 1018 3π 1019 $\frac{8}{27}(19\sqrt{19}-1)$
 1020 $\frac{59}{24}$
1021 ④ 1022 ① 1023 ⑤ 1024 ② 1025 ①
 1026 $e-2$ 1027 ② 1028 ④ 1029 ④ 1030 ②
 1031 $\frac{5}{2}$ 1032 ⑤ 1033 ① 1034 ③ 1035 $2\sqrt{2}$
 1036 ③ 1037 $\frac{4}{3}$ 1038 ① 1039 ① 1040 27
 1041 ① 1042 ③ 1043 18 1044 $\frac{256}{3}$ 1045 ②
 1046 ⑤ 1047 6π 1048 ③ 1049 ④ 1050 ①
 1051 2 1052 ④ 1053 ② 1054 ③ 1055 ⑤
 1056 8 1057 $\frac{\pi^2}{2}$ 1058 ③ 1059 ④ 1060 ③
 1061 ⑤ 1062 ④ 1063 ④ 1064 ①
 1065 $\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$ 1066 ④ 1067 ② 1068 2 1069 22
 1070 ① 1071 ③ 1072 ④ 1073 ②
 1074 $25(1 - \frac{2}{\pi})$ 1075 ① 1076 $\frac{\pi}{8}$ 1077 ③
 1078 ② 1079 $\frac{3}{2}$ 1080 ① 1081 ① 1082 3
 1083 21 1084 ①
1085 ⑤ 1086 ② 1087 ③ 1088 ① 1089 ⑤
 1090 ⑤ 1091 ② 1092 ⑤ 1093 ② 1094 ④
 1095 $2 - \frac{4}{e}$ 1096 $\frac{3}{2}\pi(e^2-1)$ 1097 4

01 삼각함수의 덧셈정리와 삼각방정식

$$\begin{aligned}
 0001 \quad \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\
 &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0002 \quad \cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0003 \quad \tan \frac{5}{12}\pi &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= 2 + \sqrt{3} \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0004 \quad \sin 65^\circ \cos 20^\circ - \cos 65^\circ \sin 20^\circ &= \sin(65^\circ - 20^\circ) \\
 &= \sin 45^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0005 \quad \sin 35^\circ \sin 25^\circ - \cos 35^\circ \cos 25^\circ &= -\cos(35^\circ + 25^\circ) \\
 &= -\cos 60^\circ \\
 &= -\frac{1}{2} \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$

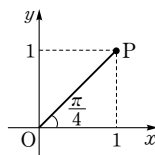
$$\begin{aligned}
 0006 \quad \frac{\tan 110^\circ - \tan 80^\circ}{1 + \tan 110^\circ \tan 80^\circ} &= \tan(110^\circ - 80^\circ) \\
 &= \tan 30^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0007 \quad \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\
 &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\
 &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta \\
 &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \dots \text{증명 끝}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0008 \quad \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\
 &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\
 &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta \\
 &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\
 &= \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta \\
 &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \dots \text{증명 끝}
 \end{aligned}$$

0009 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P(1, 1)을 잡으면

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
 \therefore \sin \theta + \cos \theta &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$



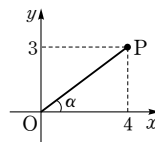
|참고| $\sin \theta + \cos \theta$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \sin \frac{\pi}{4} + \cos \theta \cos \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

0010 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 P(4, 3)을 잡으면

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\
 \overline{OP} \text{와 } x\text{-축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를} & \text{ } \alpha \text{라 하면}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} \\
 \therefore 4 \sin \theta + 3 \cos \theta &= 5 \left(\sin \theta \cdot \frac{4}{5} + \cos \theta \cdot \frac{3}{5} \right) \\
 &= 5(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \\
 &= 5 \sin(\theta + \alpha) \quad \left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5} \right) \quad \dots \text{답}
 \end{aligned}$$



0011 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 을 잡으면

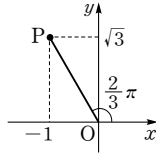
$$OP = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\therefore -\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \left\{ \sin \theta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \theta \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \cdots \text{답}$$



0012 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

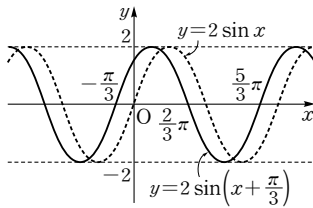
$$= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

이므로 주어진 함수의 주기는 2π , 최대값은 2, 최소값은 -2 이다.

또, $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ 의 그래프는 $y = 2 \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방

향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

0013 $y = \sin x - \cos x$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

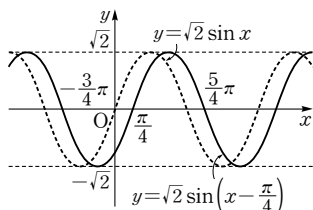
$$= \sqrt{2} \left\{ \sin x \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cos x \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

이므로 주어진 함수의 주기는 2π , 최대값은 $\sqrt{2}$, 최소값은 $-\sqrt{2}$ 이다.

또, $y = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2} \sin x$ 의 그래프를 x

축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

0014 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 에서

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

이 때, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos \alpha < 0$

$$\therefore \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

답 (1) $\frac{24}{25}$ (2) $-\frac{7}{25}$ (3) $-\frac{24}{7}$

0015 $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)$

$$= \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha$$

$$= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cdots \text{증명 끝}$$

0016 $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$

$$= \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$$

$$= \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdots \text{증명 끝}$$

0017 $\tan 3\alpha = \tan(\alpha + 2\alpha)$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan 2\alpha}{1 - \tan \alpha \tan 2\alpha}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}{1 - \tan \alpha \cdot \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}$$

$$= \frac{\tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha) + 2 \tan \alpha}{(1 - \tan^2 \alpha) - 2 \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \cdots \text{증명 끝}$$

0018 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1, \quad \sin^2 \theta = \frac{14}{16}$$

이 때, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{7}$$

$$(1) \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ = 3 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^3 = -\frac{\sqrt{14}}{8}$$

$$(2) \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$$(3) \tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \\ = \frac{3 \cdot \sqrt{7} - (\sqrt{7})^3}{1 - 3 \cdot (\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$\text{답 (1) } -\frac{\sqrt{14}}{8} \quad (2) -\frac{5\sqrt{2}}{8} \quad (3) \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$0019 \sin^2 22.5^\circ = \sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad (\because \sin 22.5^\circ > 0) \quad \text{답 } \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$0020 \cos^2 22.5^\circ = \cos^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad (\because \cos 22.5^\circ > 0) \quad \text{답 } \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$0021 \tan^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \frac{\pi}{12} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} = 2 - \sqrt{3} \\ (\because \tan \frac{\pi}{12} > 0) \quad \text{답 } 2 - \sqrt{3}$$

$$0022 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{에서} \quad \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha < 0 \text{에서} \cos \alpha > 0 \text{이므로} \quad \cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{한편, } \sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0 \text{이므로} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$$

$$\therefore \frac{3}{4}\pi < \frac{\alpha}{2} < \pi$$

$$(1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{8}$$

이 때, $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ 이므로

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(2) \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{8}$$

이 때, $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ 이므로

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$(3) \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$$

이 때, $\tan \frac{\alpha}{2} < 0$ 이므로

$$\tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{답 (1) } \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2) -\frac{\sqrt{14}}{4} \quad (3) -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

0023 삼각함수의 덧셈정리에서

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠ + ㉡을 하면

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\} \quad \dots \text{증명 끝}$$

0024 삼각함수의 덧셈정리에서

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢ - ㉣을 하면

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\} \quad \dots \text{증명 끝}$$

$$0025 \sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \{\sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ)\}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 90^\circ + \sin 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \quad \dots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0026 \quad \cos 75^\circ \sin 15^\circ &= \frac{1}{2} \{ \sin(75^\circ + 15^\circ) - \sin(75^\circ - 15^\circ) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0027 \quad \cos 75^\circ \cos 15^\circ &= \frac{1}{2} \{ \cos(75^\circ + 15^\circ) + \cos(75^\circ - 15^\circ) \} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 90^\circ + \cos 60^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0028 \quad \sin 75^\circ \sin 15^\circ &= -\frac{1}{2} \{ \cos(75^\circ + 15^\circ) - \cos(75^\circ - 15^\circ) \} \\ &= -\frac{1}{2} (\cos 90^\circ - \cos 60^\circ) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0029 \quad \sin 105^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos 45^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0030 \quad \sin 105^\circ - \sin 15^\circ &= 2 \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0031 \quad \cos 105^\circ + \cos 15^\circ &= 2 \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 60^\circ \cos 45^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0032 \quad \cos 105^\circ - \cos 15^\circ &= -2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= -2 \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0033 \quad \sin x = \frac{1}{2} \text{의 한 특수해가 } x = \frac{\pi}{6} \text{이므로} \\ x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0034 \quad \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \text{에서} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 한 특수해가 } x = \frac{5\pi}{6} \text{이므로} \\ x = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0035 \quad 3 \tan x - \sqrt{3} = 0 \text{에서} \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{의 한 특수해가 } x = \frac{\pi}{6} \text{이므로} \\ x = n\pi + \frac{\pi}{6} \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0036 \quad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \text{에서} \\ (2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0 \\ \therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1 \\ \text{(i) } \sin x = -\frac{1}{2} \text{의 한 특수해가 } x = \frac{7\pi}{6} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{(ii) } \sin x = 1 \text{의 한 특수해가 } x = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6} \text{ 또는 } x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \dots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0037 \quad \sin^2 x - \cos x + 1 = 0 \text{에서} \quad 1 - \cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \\ \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \\ (\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로} \quad \cos x = 1 \\ \cos x = 1 \text{의 한 특수해가 } x = 0 \text{이므로} \\ x = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0038 \quad \tan x + \sqrt{3} \cot x = 1 + \sqrt{3} \text{에서} \\ \tan x + \frac{\sqrt{3}}{\tan x} = 1 + \sqrt{3} \\ \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0 \\ (\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0 \\ \therefore \tan x = 1 \text{ 또는 } \tan x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{(i) } \tan x = 1 \text{의 한 특수해가 } x = \frac{\pi}{4} \text{이므로} \quad x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{(ii) } \tan x = \sqrt{3} \text{의 한 특수해가 } x = \frac{\pi}{3} \text{이므로} \quad x = n\pi + \frac{\pi}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$$x = n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = n\pi + \frac{\pi}{3} \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \dots \text{답}$$

0039 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 에서 $\cos \alpha > 0$, $\sin \beta < 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0 \end{aligned}$$

답 ③

0040 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 4$$

답 ⑤

0041 $\tan(\alpha - \beta) = 2$ 에서 $\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = 2$

$$\frac{\frac{1}{2} - \tan \beta}{1 + \frac{1}{2} \tan \beta} = 2, \quad 2 + \tan \beta = \frac{1}{2} - \tan \beta$$

$$2 \tan \beta = -\frac{3}{2} \quad \therefore \tan \beta = -\frac{3}{4}$$

답 ①

0042 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

이 때, $0 < \alpha + \beta < \pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4}\pi$$

답 ⑤

0043 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ 이고 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0044 \quad \tan 20^\circ + \cot 40^\circ &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \\ &= \frac{\sin 40^\circ \sin 20^\circ + \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \sin 40^\circ} \\ &= \frac{\cos(40^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ \sin 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \sin 40^\circ} \\ &= \frac{1}{\sin 40^\circ} = \operatorname{cosec} 40^\circ \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0045 \quad \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} &= \frac{\sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin(2\theta - \theta)}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0046 \quad \sin 80^\circ \sin 130^\circ + \sin 10^\circ \sin 40^\circ \\ &= \sin(90^\circ - 10^\circ) \sin(90^\circ + 40^\circ) + \sin 10^\circ \sin 40^\circ \\ &= \cos 10^\circ \cos 40^\circ + \sin 10^\circ \sin 40^\circ \\ &= \cos(10^\circ - 40^\circ) = \cos(-30^\circ) \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} 0047 \quad &\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\ &\tan \alpha + \tan \beta = -2a, \quad \tan \alpha \tan \beta = a + 1 \\ \therefore \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-2a}{1 - (a + 1)} = 2 \\ \therefore \sec^2(\alpha + \beta) &= 1 + \tan^2(\alpha + \beta) \\ &= 1 + 2^2 = 5 \end{aligned}$$

답 5

0048 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = 2, \quad \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\tan \alpha - \tan \beta)^2 &= (\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 4 \tan \alpha \tan \beta \\ &= 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

이 때, $\tan \alpha > \tan \beta$ 이므로 $\tan \alpha - \tan \beta = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

0049 주어진 방정식이 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$D = \sin^2 \theta - 4 \cos \theta > 0 \quad \dots\dots ①$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\sin \theta, \quad \tan \alpha \tan \beta = \cos \theta$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}\text{이므로} \quad \frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{3}$$

$$1-\cos\theta=-3\sin\theta$$

$$\text{양변을 제곱하면} \quad 1-2\cos\theta+\cos^2\theta=9\sin^2\theta$$

$$1-2\cos\theta+\cos^2\theta=9(1-\cos^2\theta)$$

$$5\cos^2\theta-\cos\theta-4=0, \quad (5\cos\theta+4)(\cos\theta-1)=0$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5} \text{ 또는 } \cos\theta=1$$

이 때, $\cos\theta=1$ 이면 ㉠을 만족하지 않으므로

$$\cos\theta=-\frac{4}{5}$$

답 - $\frac{4}{5}$

$$\text{0050 } f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha, \quad g^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\beta \text{라 하면}$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{3}, \quad g(\beta)=\frac{3}{4} \quad \therefore \sin\alpha=\frac{1}{3}, \quad \cos\beta=\frac{3}{4}$$

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \quad 0<\beta<\frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos\alpha>0, \quad \sin\beta>0 \text{이므로}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+g^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right) &= f(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{14}+3}{12} \end{aligned}$$

답 ②

$$\text{0051 } f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha, \quad f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\beta \text{라 하면} \quad f(\alpha)=\frac{1}{2}, \quad f(\beta)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}, \quad \tan\beta=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \end{aligned}$$

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 \leq \alpha+\beta < \pi \text{이므로}$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

답 ②

$$\text{0052 } g\left(\frac{3}{5}\right)=\alpha, \quad g\left(\frac{4}{5}\right)=\beta \text{이므로} \quad f(\alpha)=\frac{3}{5}, \quad f(\beta)=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos\alpha=\frac{3}{5}, \quad \cos\beta=\frac{4}{5}$$

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \quad 0<\beta<\frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin\alpha>0, \quad \sin\beta>0 \text{이므로}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0 \end{aligned}$$

답 ③

0053 두 직선 $y=3x+1$, $y=-2x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan\alpha=3, \quad \tan\beta=-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan\theta &= |\tan(\alpha-\beta)| = \left| \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \right| \\ &= \left| \frac{3-(-2)}{1+3 \cdot (-2)} \right| = 1 \end{aligned}$$

답 ①

0054 두 직선 $y=3x$, $y=\frac{1}{2}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 각각 α , β 이므로

$$\tan\alpha=3, \quad \tan\beta=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \end{aligned}$$

답 ③

$$\text{0055 } x-y+1=0 \text{에서} \quad y=x+1$$

$$(2-\sqrt{3})x+y-\sqrt{3}=0 \text{에서} \quad y=(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}$$

이므로 두 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan\alpha=1, \quad \tan\beta=\sqrt{3}-2$$

[40% 배점]

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \tan\theta &= |\tan(\alpha-\beta)| = \left| \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \right| \\ &= \left| \frac{1-(\sqrt{3}-2)}{1+1 \cdot (\sqrt{3}-2)} \right| = \frac{3-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

[40% 배점]

$$\therefore \theta=60^\circ$$

[20% 배점]

답 60°

$$\text{0056 } ax-y+1=0 \text{에서} \quad y=ax+1$$

$$x-3y+2=0 \text{에서} \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

이므로 두 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan\alpha=a, \quad \tan\beta=\frac{1}{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1, \quad \frac{a - \frac{1}{3}}{1 + a \cdot \frac{1}{3}} = \pm 1$$

$$a - \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}a \text{ 또는 } a - \frac{1}{3} = -1 - \frac{1}{3}a$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

답 ②

0057 직선 $y = \sqrt{2}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ_1 이므로 $\tan \theta_1 = \sqrt{2}$

$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\tan \theta_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \cot \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

답 ②

0058 오른쪽 그림과 같이 $\overline{QC} = a$, 점 P에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 R, $\angle PBR = \alpha$, $\angle QBC = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PR}}{\overline{BR}} = \frac{2a}{2a} = 1$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{QC}}{\overline{BC}} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 ③

0059 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 75^\circ = 4 \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= 4(\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ) \\ &= 4\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

답 ⑤

0060 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$A + B + C = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin\{\pi - (A + B)\} = \sin(A + B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{15} + \sqrt{5}}{12} \end{aligned}$$

답 ④

0061 $y = 3 \sin x - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

$$= 3 \sin x - 2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

$$= 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x - \sin x + 1$$

$$= 2 \sin x - \sqrt{3} \cos x + 1$$

$$= \sqrt{7} \sin(x + \alpha) + 1 \quad \left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}, \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$$

$-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-\sqrt{7} + 1 \leq \sqrt{7} \sin(x + \alpha) + 1 \leq \sqrt{7} + 1$$

따라서 $M = \sqrt{7} + 1$, $m = -\sqrt{7} + 1$ 이므로

$$M - m = 2\sqrt{7}$$

답 ③

0062 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2}\right)$

$$= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 $r = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} r \sin \alpha \cos \alpha &= 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 ④

0063 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos x$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos x$$

$$= \sin x + 3 \cos x$$

$$= \sqrt{10}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \cos x \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \sqrt{10} \sin(x + \alpha) \quad \left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

따라서 주어진 함수는 $\sin(x+\alpha)=-1$ 일 때 최소값 $-\sqrt{10}$ 을 가지므로

$$x+\alpha=\frac{3}{2}\pi, k=-\sqrt{10}$$

$$x=\frac{3}{2}\pi-\alpha \text{에서 } \theta=\frac{3}{2}\pi-\alpha \text{이므로}$$

$$k \cot \theta = -\sqrt{10} \cot\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sqrt{10} \tan \alpha$$

$$= -\sqrt{10} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{10} \cdot \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

$$= -3\sqrt{10}$$

답 ①

0064 $\angle APB=90^\circ$ 이므로 $\angle PAB=\theta$ 라 하면

$$\overline{AP}=6 \cos \theta, \overline{PB}=6 \sin \theta$$

[20% 배점]

$$\therefore \overline{AP}+\overline{PB}=6 \cos \theta+6 \sin \theta$$

$$=6\sqrt{2}\left(\cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}+\sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=6\sqrt{2} \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

[50% 배점]

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$$

$$\therefore 6<6\sqrt{2} \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leq 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최대값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

[30% 배점]

답 $6\sqrt{2}$

0065 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 에서 $\cos^2 x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$ 이므로

$$\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3} \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \sin 2x=2 \sin x \cos x$$

$$=2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

답 $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

0066 $\tan x=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\tan 2x=\frac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 2x+\tan \frac{\pi}{4}}{1-\tan 2x \tan \frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4}{3}+1}{1-\frac{4}{3} \cdot 1}=-7$$

답 ②

0067 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ 에서

$$\sec^2 x=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}, \quad \cos^2 x=\frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos x=-\frac{4}{5} \left(\because \frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$$

또, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 에서

$$\sin^2 x=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin x=\frac{3}{5} \left(\because \frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$$

$$\therefore \sin 2x+\cos 2x=2 \sin x \cos x+1-2 \sin^2 x$$

$$=2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)+1-2 \cdot \frac{9}{25}$$

$$=-\frac{17}{25}$$

답 ②

0068 $\tan \theta+\cot \theta=2$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}+\frac{\cos \theta}{\sin \theta}=2, \quad \frac{\sin^2 \theta+\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}=2$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}=2 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin 2\theta=2 \sin \theta \cos \theta=2 \cdot \frac{1}{2}=1$$

답 ⑤

0069 $\sin \alpha+\cos \alpha=\frac{1}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha+2 \sin \alpha \cos \alpha+\cos^2 \alpha=\frac{1}{16}$$

[50% 배점]

$$1+\sin 2\alpha=\frac{1}{16} \quad \therefore \sin 2\alpha=-\frac{15}{16}$$

[50% 배점]

답 $-\frac{15}{16}$

0070 $\sin \alpha+\sin \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha+2 \sin \alpha \sin \beta+\sin^2 \beta=\frac{1}{2}$$

..... ㉠

$\cos \alpha+\cos \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha+2 \cos \alpha \cos \beta+\cos^2 \beta=\frac{1}{2}$$

..... ㉡

㉠+㉡을 하면 $2+2 \sin \alpha \sin \beta+2 \cos \alpha \cos \beta=1$

$$\cos \alpha \cos \beta+\sin \alpha \sin \beta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos(2\alpha-2\beta)=\cos 2(\alpha-\beta)$$

$$=2 \cos^2(\alpha-\beta)-1$$

$$=2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$$

답 ①

0071 $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} &\therefore \sin 3x + \cos 3x \\ &= (3 \sin x - 4 \sin^3 x) + (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \\ &= 3(\sin x - \cos x) - 4(\sin^3 x - \cos^3 x) \\ &= 3(\sin x - \cos x) \\ &\quad - 4(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ &= 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ①

0072 $\tan \theta = \frac{2}{1} = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan 3\theta &= \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \\ &= \frac{3 \cdot 2 - 2^3}{1 - 3 \cdot 2^2} = \frac{2}{11} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{11}$

0073 $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ 에서

$$2 \sin \theta \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta \neq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta &= 4 \cos^2 \theta - 3 \\ 2 \sin \theta &= 4(1 - \sin^2 \theta) - 3 \\ 4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad (\because \sin \theta > 0)$$

답 ①

0074 $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ 에서

$$\sec^2 \theta = 1 + (2\sqrt{2})^2 = 9$$

즉, $\cos^2 \theta = \frac{1}{9}$ 이므로 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ($\because 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\sin \frac{\theta}{2} > 0$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

0075 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{5}{8}$

$$\therefore \sec^2 x = \frac{8}{5}$$

답 ③

다른 풀이 $\cos 2x = \frac{1}{4}$ 에서 $2 \cos^2 x - 1 = \frac{1}{4}$

$$2 \cos^2 x = \frac{5}{4}, \quad \cos^2 x = \frac{5}{8}$$

$$\therefore \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{8}{5}$$

0076 $\neg. \frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\sin x \sin y}$

$$= \frac{\cos y}{\sin y} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cot y - \cot x$$

$\neg. \cos 2x + 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin^2 x$
 $= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\neg. \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$

$$= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

이상에서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

0077 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

$$= \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

답 ③

0078 $\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{3}$ 에서 $1 + \tan^2 \theta = 3 - 3 \tan^2 \theta$

$$4 \tan^2 \theta = 2 \quad \therefore \tan^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ 에서 $\sec^2 \theta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

즉, $\cos^2 \theta = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} \text{이므로 } \sin \frac{\theta}{2} > 0$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0079 \quad y &= \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2\theta + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이 때, $-1 \leq \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ 이므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

따라서 $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\alpha\beta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0080 \quad f(x) &= 4 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x \\ &= 4 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + \sin 2x + 2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} \\ &= \sin 2x - \cos 2x + 3 \\ &= \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + 3 \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$\therefore 2 \leq \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + 3 \leq 3 + \sqrt{2}$$

따라서 $f(x)$ 의 최소값은 2이다.

답 ④

0081 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = a^2 - \frac{3}{16} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = a^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦에서 $\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$ 이므로

$$a^2 - \frac{3}{16} = 1 \quad \therefore a^2 = \frac{19}{16}$$

이것을 ⑧에 대입하면

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{1-\cos \theta}{2} \cdot \frac{1+\cos \theta}{2} = \frac{3}{16}$$

$$1 - \cos^2 \theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

답 ③

0082 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{a}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{b}{2}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{1}{4} \text{이므로} \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{b}{2} = -\frac{1}{4} \quad \therefore b = -\frac{1}{4}$$

한편, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 이므로

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$$

$$\left(-\frac{a}{2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{4} \right) = 1$$

$$\frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore ab = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 ③

0083 제이코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{13}{20}$$

$$\therefore \tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \frac{13}{20}}{1 + \frac{13}{20}} = \frac{7}{33}$$

답 ①

$$0084 \quad \angle DAB = \theta \text{라 하면} \quad \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos A = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

답 ①

$$0085 \quad \angle TOP = \angle TOQ = \frac{\theta}{2} \text{이므로}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$$

답 ⑤

0086 $\overline{AB}$ 가 원 O 의 지름이므로

$$\angle APB = \angle AQB = \frac{\pi}{2}$$

따라서 두 삼각형 APB , AQB 는 모두 직각삼각형이다.

$\angle PAB = \alpha$ 라 하면 $\angle QAB = 2\alpha$ 이고,

$\triangle APB$ 에서

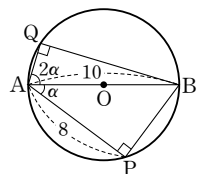
$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

따라서 $\triangle ABQ$ 에서

$$\overline{AQ} = 10 \cos 2\alpha = 10 \cdot \frac{7}{25} = \frac{14}{5}$$

답 ③



$$\begin{aligned}
0087 \quad & \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ \\
&= \frac{1}{2} \{ \cos 60^\circ + \cos(-40^\circ) \} \cos 70^\circ \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 40^\circ \right) \cos 70^\circ \\
&= \frac{1}{4} \cos 70^\circ + \frac{1}{2} \cos 40^\circ \cos 70^\circ \\
&= \frac{1}{4} \cos 70^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \{ \cos 110^\circ + \cos(-30^\circ) \} \\
&= \frac{1}{4} \cos 70^\circ + \frac{1}{4} \cos 110^\circ + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{4} \cos 70^\circ + \frac{1}{4} \cdot (-\cos 70^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
0088 \quad & \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x \\
&= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos 2x \right) + \sin^2 x \\
&= \frac{1}{2} \cos 2x + \sin^2 x \\
&= \frac{1}{2} (2 \cos^2 x - 1) + \sin^2 x \\
&= \sin^2 x + \cos^2 x - \frac{1}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x \\
&= \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) \\
&\quad \times \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) + \sin^2 x \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) + \sin^2 x \\
&= \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin^2 x \\
&= \frac{1}{2} (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0089 \quad & \sin \theta (\sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 6\theta) \\
&= \sin \theta \sin 2\theta + \sin \theta \sin 4\theta + \sin \theta \sin 6\theta \\
&= -\frac{1}{2} \{ \cos 3\theta - \cos(-\theta) \} - \frac{1}{2} \{ \cos 5\theta - \cos(-3\theta) \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \{ \cos 7\theta - \cos(-5\theta) \} \\
&= -\frac{1}{2} (\cos 3\theta - \cos \theta + \cos 5\theta - \cos 3\theta + \cos 7\theta - \cos 5\theta) \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 7\theta \\
& a > 0, b > 0 \text{ 이므로 } a=1, b=7 \\
& \therefore a+b=8
\end{aligned}$$

답 8

$$\begin{aligned}
0090 \quad & \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \{ \sin(x+y) + \sin(x-y) \}}{\frac{1}{2} \{ \sin(x+y) - \sin(x-y) \}} \\
&= \frac{\frac{1}{a} + \frac{3}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{3}{a}} = \frac{\frac{4}{a}}{-\frac{2}{a}} = -2
\end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
0091 \quad & \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) \\
&= \frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1 + 1 - 2 \sin^2 \beta) \\
&= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

답 ④

$$0092 \quad x+y=\frac{\pi}{6} \text{ 에서 } y=\frac{\pi}{6}-x \quad [20\% \text{ 배점}]$$

$$\begin{aligned}
\therefore \cos x \sin y &= \frac{1}{2} \{ \sin(x+y) - \sin(x-y) \} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{\pi}{6} - \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)
\end{aligned}$$

[30% 배점]

이 때, $-1 \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ 이므로

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{3}{4} \quad [40\% \text{ 배점}]$$

따라서 구하는 최소값은 $-\frac{1}{4}$ 이다. [10% 배점]

답 $-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
0093 \quad & \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2}{3}\pi + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2}{3}\pi - x \right) \\
&= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2 \left(\frac{2}{3}\pi + x \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2 \left(\frac{2}{3}\pi - x \right) \right\} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{4}{3}\pi + 2x \right) + \cos \left(\frac{4}{3}\pi - 2x \right) \right\} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4}{3}\pi \cos 2x \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
 0094 \quad & \sin 80^\circ - \sin 40^\circ + \sin 200^\circ \\
 &= 2 \cos 60^\circ \sin 20^\circ + \sin (180^\circ + 20^\circ) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 0095 \quad & \cos 10^\circ + \cos 110^\circ - \cos 150^\circ \\
 &= 2 \cos 60^\circ \cos (-50^\circ) - \cos 150^\circ \\
 &= \cos 50^\circ - \cos 150^\circ \\
 &= -2 \sin 100^\circ \sin (-50^\circ) \\
 &= 2 \sin 50^\circ \sin 100^\circ
 \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $\theta=50^\circ$ 이므로 $\frac{\theta}{a}=25^\circ$

답 ③

$$\begin{aligned}
 0096 \quad & \sin (\theta - 60^\circ) - \sin \theta + \sin (\theta + 60^\circ) \\
 &= \sin (\theta - 60^\circ) + \sin (\theta + 60^\circ) - \sin \theta \\
 &= 2 \sin \theta \cos (-60^\circ) - \sin \theta \\
 &= 2 \sin \theta \cdot \frac{1}{2} - \sin \theta = 0
 \end{aligned}$$

다른 풀이 $\sin (\theta - 60^\circ) - \sin \theta + \sin (\theta + 60^\circ)$
 $= \sin \theta \cos 60^\circ - \cos \theta \sin 60^\circ - \sin \theta$
 $+ \sin \theta \cos 60^\circ + \cos \theta \sin 60^\circ$
 $= \sin \theta - \sin \theta = 0$

$$\begin{aligned}
 0097 \quad & y = \cos \left(x + \frac{5}{6}\pi \right) + \cos \left(x - \frac{5}{6}\pi \right) \\
 &= 2 \cos x \cos \frac{5}{6}\pi \\
 &= -\sqrt{3} \cos x
 \end{aligned}$$

이 때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로
 $-\sqrt{3} \leq -\sqrt{3} \cos x \leq \sqrt{3}$
 따라서 구하는 최대값은 $\sqrt{3}$ 이다.

[50% 배점]

[30% 배점]

[20% 배점]

답 $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 0098 \quad & \frac{1+2 \cos 2x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} \\
 &= \frac{1+2 \cos 2x}{\cos 3x + 2 \cos 3x \cos (-2x)} \\
 &= \frac{1+2 \cos 2x}{\cos 3x (1+2 \cos 2x)} = \frac{1}{\cos 3x}
 \end{aligned}$$

이므로 주어진 식은

$$\frac{1}{\cos 3x} = 3 \quad \therefore \cos 3x = \frac{1}{3}$$

$0 < x < \frac{\pi}{3}$ 에서 $0 < 3x < \pi$ 이므로 $\sin 3x > 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin 3x &= \sqrt{1 - \cos^2 3x} \\
 &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$0099 \quad \frac{2 \sin 2\theta \cos 2\theta}{\sin 5\theta + \sin 3\theta} = \frac{\sin 4\theta}{2 \sin 4\theta \cos \theta} = \frac{1}{2 \cos \theta}$$

이므로 주어진 식은

$$\frac{1}{2 \cos \theta} = 1 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 0100 \quad & \cos (B+C) \cos (B-C) \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 2B + \cos 2C) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 B + 1 - 2 \sin^2 C) \\
 &= 1 - \sin^2 B - \sin^2 C
 \end{aligned}$$

따라서 $\cos^2 A = 1 - \sin^2 B - \sin^2 C$ 이므로

$$\begin{aligned}
 1 - \sin^2 A &= 1 - \sin^2 B - \sin^2 C \\
 \therefore \sin^2 A &= \sin^2 B + \sin^2 C
 \end{aligned}$$

이 때, $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a}{2R}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \\
 \therefore a^2 &= b^2 + c^2
 \end{aligned}$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 ①

$$\begin{aligned}
 0101 \quad & \cos A + \cos B = \sin A - \sin B \text{에서} \\
 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\
 \therefore \cos \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{A-B}{2} \quad \left(\because \cos \frac{A+B}{2} \neq 0 \right)
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{A-B}{2} = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$A - B = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $A+B+C=\pi$ 이고, $C=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$A + B = \frac{5}{6}\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①+②을 하면

$$2A = \frac{4}{3}\pi \quad \therefore A = \frac{2}{3}\pi$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

$$\begin{aligned}
 0102 \quad & \cos A + \cos B = \sin C \text{에서} \\
 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= \sin C
 \end{aligned}$$

이 때, $A+B+C=\pi$ 이므로

$$2 \cos \frac{\pi-C}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \sin C$$

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \quad \left(\because \sin \frac{C}{2} \neq 0 \right)$$

$$\text{즉, } \frac{A-B}{2} = \frac{C}{2} \text{ 또는 } \frac{A-B}{2} = -\frac{C}{2} \text{ 이므로}$$

$$A=B+C \text{ 또는 } B=A+C$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 또는 $B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

답 ③

$$0103 \cot\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\tan 2x \text{ 이므로 주어진 식은}$$

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\tan 2x, \quad x+\frac{\pi}{5}=n\pi+2x$$

$$\therefore x=n\pi+\frac{\pi}{5} \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

답 ③

$$0104 \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x \text{ 이므로 주어진 식은}$$

$$\cos 2x=\cos x, \quad 2x=2n\pi \pm x$$

$$\therefore x=2n\pi \text{ 또는 } x=\frac{2n\pi}{3} \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

답 ④

$$0105 \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

이므로 주어진 식은

$$\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right), \quad 2x=2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\therefore x=2n\pi-\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$$

따라서 주어진 방정식의 일반해는 $\neg, \cup$ 이다.

답 ③

$$0106 \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin x \cos \frac{\pi}{3}+\cos x \sin \frac{\pi}{3}+\cos x \cos \frac{\pi}{6}+\sin x \sin \frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2} \sin x+\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x+\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x+\frac{1}{2} \sin x$$

$$=\sin x+\sqrt{3} \cos x$$

이므로 주어진 방정식은

$$\sin x+\sqrt{3} \cos x=\sin x \quad \therefore \cos x=0$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ 이므로 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi$$

따라서 실근의 개수는 2이다.

답 ②

$$0107 \sin 2x \cos x+\cos 2x \sin x=\sin (2x+x)=\sin 3x$$

$$\text{이므로 주어진 방정식은 } \sin 3x=\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ 에서 } 0 \leq 3x \leq 3\pi \text{ 이므로}$$

$$3x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 3x=\frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } 3x=\frac{13}{6}\pi \text{ 또는 } 3x=\frac{17}{6}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{18} \text{ 또는 } x=\frac{5}{18}\pi \text{ 또는 } x=\frac{13}{18}\pi \text{ 또는 } x=\frac{17}{18}\pi$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{18}+\frac{5}{18}\pi+\frac{13}{18}\pi+\frac{17}{18}\pi=2\pi$$

답 ③

$$0108 \sin x+\sqrt{3} \cos x=2 \sin \left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이므로 주어진 방정식은

$$2 \sin \left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \quad \therefore \sin \left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$0 < x < 2\pi \text{ 에서 } \frac{\pi}{3} < x+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \text{ 이므로}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{11}{6}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha=\frac{11}{6}\pi, \beta=\frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\alpha-\beta=\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\pi$$

답 ④

$$0109 \sin x+\cos x=\sqrt{2} \sin \left(x+\frac{\pi}{4}\right) \text{ 이므로 주어진 방정식은}$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \quad \therefore \sin \left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$0 \leq x < 4\pi \text{ 에서 } \frac{\pi}{4} \leq x+\frac{\pi}{4} < \frac{17}{4}\pi \text{ 이므로}$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{9}{4}\pi \quad [40\% \text{ 배점}]$$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{4}+\frac{9}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi \quad [20\% \text{ 배점}]$$

답 $\frac{5}{2}\pi$

$$0110 \sin \left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos \left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \sin \left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2} \cos x$$

이므로 주어진 방정식은

$$\sqrt{2} \cos x=1 \quad \therefore \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq x < m\pi \text{ 이므로}$$

$$x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{7}{4}\pi \text{ 또는 } x=\frac{9}{4}\pi$$

$$\text{또는 } x=\frac{15}{4}\pi \text{ 또는 } x=\frac{17}{4}\pi \dots$$

이 때, 근의 개수가 4이므로

$$\frac{15}{4}\pi < m\pi \leq \frac{17}{4}\pi$$

$$m \text{이 자연수이므로 } m=4$$

답 4

0111 $\sin 2x + \sin x = 0$ 에서

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0, \quad \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = -\frac{1}{2}$$

이 때, $0 \leq x < 2\pi$ 이므로

(i) $\sin x = 0$ 일 때, $x = 0$ 또는 $x = \pi$

(ii) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$\pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 3\pi$$

답 ③

0112 $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ 이므로 주어진 등식에 대입하면

$$3(1 - 2 \sin^2 \theta) + 4\sqrt{2} \sin \theta = 3$$

$$6 \sin^2 \theta - 4\sqrt{2} \sin \theta = 0, \quad 2 \sin \theta(3 \sin \theta - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0 \text{ 또는 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

답 ①

0113 $\tan x + \tan \frac{x}{2} = 0$ 에서

$$\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} (1 - \tan^2 \frac{x}{2}) = 0$$

$$\tan \frac{x}{2} (3 - \tan^2 \frac{x}{2}) = 0$$

$$\therefore \tan \frac{x}{2} = 0 \text{ 또는 } \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{3}$$

정수 n 에 대하여

(i) $\tan \frac{x}{2} = 0$ 일 때, $\frac{x}{2} = n\pi \quad \therefore x = 2n\pi$

(ii) $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{3} \quad \therefore x = 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$

(iii) $\tan \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ 일 때, $\frac{x}{2} = n\pi - \frac{\pi}{3} \quad \therefore x = 2n\pi - \frac{2}{3}\pi$

이 때, $\frac{8}{3}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi$ 이므로 해가 될 수 있다.

답 ④

0114 $\sin^2 \theta + \sin^2 2\theta = \sin^2 3\theta$ 에서

$$\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{1 - \cos 4\theta}{2} = 1 - \cos^2 3\theta$$

$$\cos 2\theta + \cos 4\theta = 2 \cos^2 3\theta$$

$$2 \cos 3\theta \cos (-\theta) = 2 \cos^2 3\theta$$

$$2 \cos 3\theta (\cos 3\theta - \cos \theta) = 0$$

$$2 \cos 3\theta \cdot (-2) \sin 2\theta \sin \theta = 0$$

$$\cos 3\theta \sin 2\theta \sin \theta = 0$$

$$\therefore \cos 3\theta = 0 \text{ 또는 } \sin 2\theta = 0 \text{ 또는 } \sin \theta = 0$$

(i) $\sin \theta = 0$ 일 때,

$$0 \leq \theta < \pi \text{이므로 } \theta = 0$$

(ii) $\sin 2\theta = 0$ 일 때,

$$0 \leq 2\theta < 2\pi \text{이므로 } 2\theta = 0 \text{ 또는 } 2\theta = \pi$$

$$\therefore \theta = 0 \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{2}$$

(iii) $\cos 3\theta = 0$ 일 때,

$$0 \leq 3\theta < 3\pi \text{이므로}$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } 3\theta = \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } 3\theta = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$

이상에서 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 4

0115 $x^2 - 4(\sin \theta + \cos \theta)x + 2 = 0$ 이 중근을 가지려면 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \{2(\sin \theta + \cos \theta)\}^2 - 2 = 0$$

$$4(1 + 2 \sin \theta \cos \theta) - 2 = 0$$

$$2 + 4 \sin 2\theta = 0 \quad \therefore \sin 2\theta = -\frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $0 \leq 2\theta < 4\pi$ 이므로

$$2\theta = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } 2\theta = \frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } 2\theta = \frac{19}{6}\pi \text{ 또는 } 2\theta = \frac{23}{6}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{19}{12}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{23}{12}\pi$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 θ 의 값이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0116 $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ 에서

$$2 \cos 2x \cos (-x) + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos 2x = 0$$

(i) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$0 < x \leq \pi \text{이므로 } x = \frac{2}{3}\pi$$

(ii) $\cos 2x = 0$ 일 때,

$$0 < 2x \leq 2\pi \text{이므로 } 2x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } 2x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근의 개수는 3이다.

답 ③

0117 $\sin x + \sin 3x = \cos x - \cos 3x$ 에서
 $2 \sin 2x \cos(-x) = -2 \sin 2x \sin(-x)$
 $\sin 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 0$
 $\sin 2x (\cos x - \sin x) = 0$

$\therefore \cos x = \sin x$ 또는 $\sin 2x = 0$ [40% 배점]

(i) $\cos x = \sin x$ 일 때, $0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$ [20% 배점]

(ii) $\sin 2x = 0$ 일 때, $0 \leq 2x < 4\pi$ 이므로

$2x = 0$ 또는 $2x = \pi$ 또는 $2x = 2\pi$ 또는 $2x = 3\pi$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ [20% 배점]

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{9}{2}\pi$ [20% 배점]

답 $\frac{9}{2}\pi$

0118 $f(x) = 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 1$ 또는 $x = 3$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는 1, 3이고
 $f'(x) = 2x - 4$ 이므로

$f'(1) = -2, f'(3) = 2$

두 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면 $\tan \alpha = -2, \tan \beta = 2$

$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$
 $= \left| \frac{-2 - 2}{1 + (-2) \cdot 2} \right| = \frac{4}{3}$

$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ 에서

$\sec^2 \theta = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}, \quad \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$

$\therefore \cos \theta = \frac{3}{5} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ [답 ③]

0119 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 θ 이므로 오른쪽 그림에서

$OA' = OA \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
 $= 2 \sin \theta$

$OB' = OB \cos \theta = 2\sqrt{3} \cos \theta$

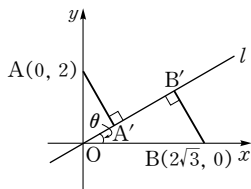
$\therefore OA' + OB' = 2 \sin \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta$

$= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

$= 4 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq 4$

(단, 등호는 $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 성립한다.)

따라서 $OA' + OB'$ 이 최대가 되는 θ 의 값은 $\frac{\pi}{6}$ 이다. [답 ②]



0120 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원을 그리면 $\triangle PAB$ 가 원에 내접하므로 $\angle APB = 90^\circ$

$\angle PAB = \theta$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{AB} \cos \theta = 60 \cos \theta$

$\overline{BP} = \overline{AB} \sin \theta = 60 \sin \theta$

총 공사 비용을 $f(\theta)$ (억 원)라 하면

$f(\theta) = 6 \cdot 60 \cos \theta + 8 \cdot 60 \sin \theta$

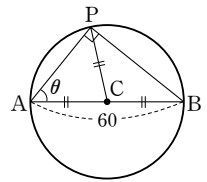
$= 120(4 \sin \theta + 3 \cos \theta)$

$= 600 \sin(\theta + \alpha) \quad \left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5}\right)$

따라서 $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $f(\theta)$ 의 값이 최대이므로

$\tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}$

[답 ①]



0121 $\frac{1}{3+4 \sin^2 \theta} + \frac{1}{3+4 \cos^2 \theta}$

$= \frac{3+4 \cos^2 \theta + 3+4 \sin^2 \theta}{(3+4 \sin^2 \theta)(3+4 \cos^2 \theta)}$

$= \frac{6+4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{9+12(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 16 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}$

$= \frac{10}{21+4 \sin^2 2\theta}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ 에서 $0 \leq 2\theta \leq 4\pi$ 이므로

$0 \leq \sin^2 2\theta \leq 1, \quad 21 \leq 21+4 \sin^2 2\theta \leq 25$

$\therefore \frac{2}{5} \leq \frac{10}{21+4 \sin^2 2\theta} \leq \frac{10}{21}$

따라서 주어진 식의 최소값은 $\frac{2}{5}$ 이다. [답 ④]

0122 $\overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 3$ 이므로 $\overline{AB} = 5t, \overline{AC} = 3t (t > 0)$ 라 하면

$\overline{BC} = \sqrt{(5t)^2 - (3t)^2} = 4t$

또, $\angle BAD = \angle ABD = \theta$ 라 하면

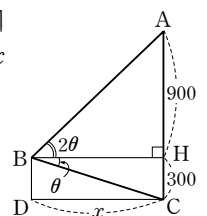
$\cos \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4t}{5t} = \frac{4}{5}$

$\therefore \cos(\angle ADC) = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$
 $= 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$ [답 ③]

0123 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{CD} = \overline{BH} = x$ 로 놓으면

$\tan \theta = \frac{300}{x},$

$\tan 2\theta = \frac{900}{x}$



$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \text{에서}$$

$$\frac{900}{x} = \frac{2 \cdot \frac{300}{x}}{1 - \left(\frac{300}{x}\right)^2}, \quad 3 = \frac{2}{1 - \frac{300^2}{x^2}}$$

$$3 - \frac{3 \cdot 300^2}{x^2} = 2, \quad \frac{3 \cdot 300^2}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 3 \cdot 300^2 \quad \therefore x = 300\sqrt{3} \text{ (m)}$$

답 ③

0124 반지름의 길이가 1인 단위원 위의 두 점

$A(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B(\cos \beta, \sin \beta)$ ($\alpha > \beta$)
에 대하여 $\overline{AB}$ 의 중점을 $M(t, s)$ 라 하면 $\angle AOB = \alpha - \beta$ 이므로

$$\theta = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\gamma = \alpha - \theta = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

또, 직각삼각형 OAM에서 $\overline{OM} = \cos \theta$
점 M에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OMH
에서

$$\sin(\pi - \gamma) = \frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}$$

$$\begin{aligned} \therefore s = \overline{MH} &= \overline{OM} \sin(\pi - \gamma) = \cos \theta \sin \gamma \\ &= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots ㉠$$

그런데 $M(t, s)$ 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$s = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}$$

$$\therefore \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{답 ③}$$

0125 $\sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)\cos(x-y)=0$ 에서

$$\sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{ 또는 } \cos(x-y)=0$$

$$(i) \sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{ 일 때, } -\frac{\pi}{2} \leq x+y+\frac{\pi}{2} \leq \frac{3}{2}\pi \text{ 이므로}$$

$$x+y+\frac{\pi}{2}=0 \text{ 또는 } x+y+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$\therefore y=-x-\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } y=-x+\frac{\pi}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(ii) \cos(x-y)=0 \text{ 일 때, } -\pi \leq x-y \leq \pi \text{ 이므로}$$

$$x-y=-\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x-y=\frac{\pi}{2}$$

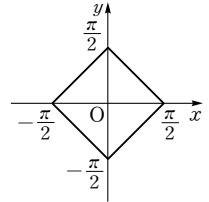
$$\therefore y=x+\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } y=x-\frac{\pi}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

㉠, ㉡을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽
그림과 같으므로 점 (x, y) 의 자취의 길
이는

$$4 \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$$

답 ④



0126 주어진 연립방정식에서

$$1 - \sin 2x = \cos y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 - \cos 2x = \sin y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 각각 제곱하여 더하면

$$(1 - \sin 2x)^2 + (1 - \cos 2x)^2 = \cos^2 y + \sin^2 y$$

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x - 2(\sin 2x + \cos 2x) + 2 = 1$$

$$\therefore \sin 2x + \cos 2x = 1$$

삼각함수의 합성에 의하여

$$\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq x < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \text{ 이므로}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{4}$$

(i) $x=0$ 일 때,

$$\cos y = 1 \quad \therefore y=0 \quad (\because 0 \leq y < \pi)$$

(ii) $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때,

$$\cos y = 0 \quad \therefore y=\frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq y < \pi)$$

따라서 연립방정식의 해는

$$x=0, y=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}$$

의 2개이다.

답 2

0127 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle ABP = x$ 라 하면

$$\overline{BP} = \cos x, \quad \overline{AP} = \sin x$$

$$\sqrt{3} \overline{AP} - \overline{BP} = \sqrt{2} \text{에서}$$

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } -\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore x = \frac{5}{12}\pi$$

답 ⑤

0128 $y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 점 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ 에서의 접선의 기울기는 $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ [20% 배점]

두 직선 m, l 이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로 접선 m 과 x 축이 이루는 예각의 크기는 2θ 이다.

즉, $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$ 이므로 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3}$ [40% 배점]

$$3\tan\theta = 2 - 2\tan^2\theta, \quad 2\tan^2\theta + 3\tan\theta - 2 = 0$$

$$(2\tan\theta - 1)(\tan\theta + 2) = 0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{2} \quad (\because \tan\theta > 0) \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\therefore 8\tan\theta = 4 \quad [10\% \text{ 배점}]$$

답 4

0129 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})\sin(x - \frac{\pi}{4})$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos \frac{\pi}{2})$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x \quad [20\% \text{ 배점}]$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$ 이므로 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}\cos 2x \leq \frac{1}{2} \quad [20\% \text{ 배점}]$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $\cos 2x = -1$ 일 때 최대값 $\frac{1}{2}$ 을 갖고,

$\cos 2x = 1$ 일 때 최소값 $-\frac{1}{2}$ 을 가진다.

(i) $\cos 2x = -1$ 일 때, $2x = \pi \quad \therefore x = \frac{\pi}{2}$ [20% 배점]

(ii) $\cos 2x = 1$ 일 때, $2x = 0 \quad \therefore x = 0$ [20% 배점]

(i), (ii)에서 $a = \frac{\pi}{2}, b = 0$ 이므로

$$a - b = \frac{\pi}{2} \quad [20\% \text{ 배점}]$$

답 $\frac{\pi}{2}$

0130 $4\sin x - \cos 2x = 4\sin x - (1 - 2\sin^2 x)$

$$= 2\sin^2 x + 4\sin x - 1 \quad [20\% \text{ 배점}]$$

이므로 $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)라 하면 주어진 방정식은

$$2t^2 + 4t - 1 = a \quad [20\% \text{ 배점}]$$

이 때, 주어진 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y = 2t^2 + 4t - 1$ 과 직선 $y = a$ 가 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 만나야 한다.

[20% 배점]

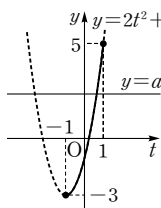
따라서 오른쪽 그림에서

$$-3 \leq a \leq 5 \quad [20\% \text{ 배점}]$$

이므로 정수 a 의 개수는 9이다.

[20% 배점]

답 9



02 함수의 극한

0131 $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1, \quad -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

이 때, $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

답 0

0132 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

이 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} (-\frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$$

답 0

0133 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \cdot (-1)$$

$$= -(1 + 1) = -2$$

답 -2

0134 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

답 1

0135 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin x}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0136 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-\cos x)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0137 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$ 답 2

0138 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0139 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \tan 2\theta}{3\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{3\theta} - \frac{\tan 2\theta}{3\theta} \right)$
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{3} - \frac{\tan 2\theta}{2\theta} \cdot \frac{2}{3} \right)$
 $= 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

0140 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta + \tan 2\theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} + \frac{\tan 2\theta}{\sin \theta} \right)$
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} + \frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\tan 2\theta}{2\theta} \cdot 2 \right)$
 $= 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 3$ 답 3

0141 $x^\circ = \frac{\pi}{180} x$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{\frac{\pi}{180} x} \cdot \frac{\pi}{180}$
 $= 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$ 답 $\frac{\pi}{180}$

0142 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan 3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 3x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot 3$
 $= 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ 답 3

0143 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sin t = 1$ 답 1

0144 $\frac{\pi}{3} - \theta = t$ 로 놓으면 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3\theta - \pi}{\tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3\left(\frac{\pi}{3} - t\right) - \pi}{\tan t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-3t}{\tan t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} \cdot (-3)$
 $= 1 \cdot (-3) = -3$ 답 -3

0145 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^x = 0$ 답 0

0146 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{3 \cdot 3^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{5}{3} \right)^x = 0$ 답 0

0147 $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right\}$

이 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right\} = 1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right\} = \infty$ (발산) 답 발산

0148 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{2x} + 1}{3^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9^x + 1}{9^x - 1}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 9^x = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9^x + 1}{9^x - 1} = -1$ 답 -1

0149 $\lim_{x \rightarrow +0} \log_4 4x = -\infty$ (발산) 답 발산

0150 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\log x) = -\infty$ (발산) 답 발산

0151 $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1 + 0$ 일 때 $t \rightarrow +0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+0} \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) = \lim_{t \rightarrow +0} \log_{\frac{1}{2}} t = \infty$ (발산) 답 발산

0152 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0153 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} \right\}^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$ 답 $e^{\frac{3}{2}}$

0154 $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$ 답 e

0155 $\ln x = 3$ 에서 $x = e^3$ 답 e^3

0156 $\ln x = -1$ 에서 $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0157 $e^x = 10$ 의 양변에 자연로그를 취하면
 $\ln e^x = \ln 10 \quad \therefore x = \ln 10$ 답 $\ln 10$

0158 $e^{2x} = \frac{1}{2}$ 의 양변에 자연로그를 취하면
 $\ln e^{2x} = \ln \frac{1}{2}, \quad 2x = -\ln 2$
 $\therefore x = -\frac{1}{2} \ln 2$ 답 $-\frac{1}{2} \ln 2$

0159 $\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0160 $\ln \frac{1}{2e} = \ln (2e)^{-1} = -(\ln 2 + \ln e)$
 $= -\ln 2 - 1$ 답 $-\ln 2 - 1$

$$0161 \quad \frac{1}{\log_3 e} + \frac{1}{\log_2 e} = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6 \quad \text{답 } \ln 6$$

$$0162 \quad \ln e + \ln 4e - \ln 2e = \ln \frac{e \cdot 4e}{2e} = \ln 2e \\ = \ln 2 + \ln e = \ln 2 + 1 \quad \text{답 } \ln 2 + 1$$

$$0163 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^x = \infty \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - e^{-x}) = -\infty (\text{발산}) \quad \text{답 발산}$$

$$0164 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e} + \frac{1}{e^{2x+1}}}{1 - \frac{1}{e^{2x+1}}} = \frac{1}{e} \quad \text{답 } \frac{1}{e}$$

$$0165 \quad \lim_{x \rightarrow +0} (\ln 2x - \ln x^2) = \lim_{x \rightarrow +0} \ln \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \ln \frac{2}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow +0} (\ln 2 - \ln x) \\ = \infty (\text{발산}) \quad \text{답 발산}$$

$$0166 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \ln 2 \quad \text{답 } \ln 2$$

$$0167 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} \\ = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \quad \cdots \text{증명 끝}$$

$$0168 \quad a^x - 1 = t \text{로 놓으면} \\ a^x = t + 1 \quad \therefore x = \log_a (1+t) \\ x \rightarrow 0 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a (1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \log_a (1+t)} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}} \\ = \frac{1}{\log_a e} = \ln a \quad \cdots \text{증명 끝}$$

$$0169 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1+x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1+x)}{x} \cdot \frac{1}{5} \\ = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \quad \text{답 } \frac{1}{5}$$

$$0170 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3 (1-3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3 (1-3x)}{-3x} \cdot (-3) \\ = \frac{1}{\ln 3} \cdot (-3) = -\frac{3}{\ln 3} \quad \text{답 } -\frac{3}{\ln 3}$$

$$0171 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \cdot (-1) \\ = 1 \cdot (-1) = -1 \quad \text{답 } -1$$

$$0172 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2} \quad \text{답 } \ln \sqrt{2}$$

$$0173 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{1 - \cos^2 x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{1 + \cos x} \\ = 0 \quad \text{답 } ③$$

$$0174 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan^2 x} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x (\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{답 } ②$$

$$0175 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ = 0 \quad \text{답 } 0$$

$$0176 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (2 \cos^2 x - 1)}{1 - \cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} 2(1 + \cos x) \\ = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{답 } 4$$

$$\begin{aligned}
 0177 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos 3x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-2 \sin 2x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-2 \cdot 2 \sin x \cos x \cdot \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-4 \cos x} = -\frac{1}{4} \quad \text{답 } -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos 3x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-4 \cos x (1 - \cos^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-4 \cos x} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0178 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \quad \text{답 } 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0179 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{9x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{9x} + \frac{\sin 3x}{9x} + \frac{\sin 5x}{9x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{9} \right) \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{5}{9} = 1 \quad \text{답 } 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0180 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{\sin 2x} - \frac{\sin x}{\sin 2x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5}{2} - \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 \quad \text{답 } 5
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 3x \sin 2x}{\sin 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 3x = 2
 \end{aligned}$$

0181 $\triangle OAB < (\text{부채꼴 } OAB \text{의 넓이}) < \triangle OAC$ 에서

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta &< \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \theta < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \theta \\
 \frac{1}{2} \boxed{\sin \theta} &< \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \boxed{\tan \theta} \\
 \therefore \sin \theta &< \theta < \tan \theta \\
 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \theta > 0 \text{이므로 위의 부등식의 각 변을 } \sin \theta \text{로 나} \\
 누면 \quad 1 &< \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}
 \end{aligned}$$

각 변에 역수를 취하면 $\boxed{\cos \theta} < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$

이 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \cos \theta = 1$ 이므로 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ **답** ②

$$\begin{aligned}
 0182 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x^3 - x^2 + x)}{3x^3 + x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x^3 - x^2 + x)}{2x^3 - x^2 + x} \cdot \frac{2x^3 - x^2 + x}{3x^3 + x^2 - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{x(2x^2 - x + 1)}{x(3x^2 + x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + x - 1} = -1 \quad \text{답 } ①
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0183 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + \tan 3x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{\tan 3x}{5x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{3}{5} \right) \\
 &= 1 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = 1 \quad \text{답 } ⑤
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0184 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\tan 2x + 2 \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{\tan 2x}{x} + \frac{2 \tan x}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{\tan x}{x}} \\
 &= \frac{1}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1} = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0185 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 4x \sin(-x)}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x \sin x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 4x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \\
 &= 2 \cdot 1 \cdot 4 = 8 \quad \text{답 } ④
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0186 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos(a+2)x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\{(a+1)x\} \sin(-x)}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\{(a+1)x\} \sin x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\{(a+1)x\}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin\{(a+1)x\}}{(a+1)x} \cdot (a+1) \\
 &= 2 \cdot 1 \cdot (a+1) = 2(a+1) \\
 \text{따라서 } 2(a+1) &= 4 \text{이므로 } a+1=2 \\
 \therefore a &= 1 \quad \text{답 } ③
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0187 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos \frac{x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{4}} \right)^2 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{4}}{\sin \frac{x}{4}} \cdot 4 \right)^2 \\
 &= (1 \cdot 1 \cdot 4)^2 = 16
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0188 \quad x^\circ = \frac{\pi}{180} x \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{180} x}{\frac{\pi}{180} x} \cdot \frac{\pi}{180} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{180} \\
 &= \frac{\pi}{360}
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 0189 \quad x^\circ = \frac{\pi}{180} x \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\circ}{\tan \frac{x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{180} x}{\tan \frac{x}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2 \\
 &= 1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 2 = \frac{\pi}{90}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{90}$

$$\begin{aligned}
 0190 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0191 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos kx)(1 + \cos kx)}{x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 kx}{x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \cdot k^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos kx} \\
 &= 1^2 \cdot k^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{k^2}{2}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0192 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos x - \frac{\pi}{2}}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2}(\cos x - 1) + x \cos x}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos x - 1}{\sin x} + \frac{x \cos x}{\sin x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\sin x (\cos x + 1)} + \frac{x}{\tan x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-\sin^2 x}{\sin x (\cos x + 1)} + \frac{x}{\tan x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x + 1} \right) + \frac{x}{\tan x} \right\} \\
 &= 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0193 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x + \cos x - 3}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(2 \cos x + 3)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} \cdot (2 \cos x + 3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} \cdot (2 \cos x + 3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x + 1} \cdot (2 \cos x + 3) \\
 &= -1 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 0194 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin^2 x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} - \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} - \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} - 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right\} \\
 &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1^2 = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 0195 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 3x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} \{ \cos 4x + \cos(-2x) \}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos 4x - \cos 2x}{2x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2x^2} + \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1 - \cos 4x)(1 + \cos 4x)}{2x^2(1 + \cos 4x)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{2x^2(1 + \cos 2x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin^2 4x}{2x^2(1 + \cos 4x)} + \frac{\sin^2 2x}{2x^2(1 + \cos 2x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 4x} \cdot 8 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 2x} \cdot 2 \right\} \\
 &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 + 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 5
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0196 \quad & \frac{\pi}{2} - x = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로} \\
 & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0197 \quad & x - \frac{\pi}{2} = \theta \text{로 놓으면 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } \theta \rightarrow 0 \text{ 이므로} \\
 & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta (-\cot \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\theta}{\tan \theta} \right) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 0198 \quad & x + \pi = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\pi \text{ 일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로} \\
 & \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1 + \cos x}{(x + \pi) \sin x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(t - \pi)}{t \sin(t - \pi)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{-t \sin t(1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{-t \sin t(1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \right) \cdot \frac{1}{1 + \cos t} \\
 &= -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 0199 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \sin(x-1)}{x^3 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \sin(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

[50% 배점]

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이고, 주어진 극한값이 2이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0} a \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{3} = 2, \quad a \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$\therefore a = 6$$

[50% 배점]

답 6

$$\begin{aligned}
 0200 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{3}{2}\pi x}{x^2 - 1} \text{에서 } x-1=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1 \text{ 일 때} \\
 & t \rightarrow 0 \text{ 이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{3}{2}\pi x}{x^2 - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{3}{2}(t+1)\pi}{(t+1)^2 - 1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)}{t^2 + 2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3}{2}\pi t}{t(t+2)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3}{2}\pi t}{\frac{3}{2}\pi t} \cdot \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{t+2} \\
 &= 1 \cdot \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi
 \end{aligned}$$

또, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin \pi x}$ 에서 $x-2=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin \pi x} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\sin(s+2)\pi} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\sin(2\pi + \pi s)} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi s}{\sin \pi s} \cdot \frac{1}{\pi} \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

따라서 $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $\beta = \frac{1}{\pi}$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{3}{4}$$

답 ③

0201 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\cos \frac{\pi}{2} x\right)}{x-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos \frac{\pi}{2}(t+1)\right\}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(-\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(-\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{-\sin \frac{\pi}{2}t} \cdot \frac{-\sin \frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{\pi}{2}$

0202 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2$$

답 ⑤

0203 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{x + \frac{\pi}{4}}{\sin x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{x + \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{\sin t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0204 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \tan\left(\sin \frac{1}{x}\right) \operatorname{cosec} \frac{1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \tan(\sin t) \operatorname{cosec} t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin t)}{\sin t} = 1 \end{aligned}$$

답 1

0205 $x^\circ = \frac{\pi}{180}x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\circ \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180} x \sin \frac{1}{x} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi}{180}$$

답 ②

0206 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \sin \frac{\pi}{3} - \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{x} \right) \right\}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2x} \right) \sin \left(-\frac{1}{2x} \right) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -2x \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2x} \right) \sin \frac{1}{2x} \right\} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\frac{1}{2x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{t} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + t \right) \sin t \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\cos \left(\frac{\pi}{3} + t \right) \cdot \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

0207 $\frac{b}{2x+a} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{b-at}{2t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{b}{2x+a} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b-at}{2t} \sin t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b-at}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} \\ &= \frac{b}{2} \cdot 1 = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

답 ①

0208 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax \sin x + b) = 0 \quad \therefore b = 0$$

$b=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{ax \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{ax \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{ax \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2a} = \frac{1}{10}$ 이므로 $a = 5$

$$\therefore a^2 + b^2 = 25$$

답 ⑤

0209 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) = 0 \quad \therefore b = 0 \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$b=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+a)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{x+a}{2} \\ &= 1 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

[50% 배점]

따라서 $\frac{a}{2}=3$ 이므로 $a=6$

$$\therefore a+b=6+0=6$$

[20% 배점]

답 6

0210 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-2)=0$$

$$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$$

$b=4$ 를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{ax+4}-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(\sqrt{ax+4}+2)}{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(\sqrt{ax+4}+2)}{ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot (\sqrt{ax+4}+2) \\ &= \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 4 = \frac{4}{a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{4}{a}=4$ 이므로 $a=1$

$$\therefore a-b=1-4=-3$$

답 ①

0211 $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$)로 놓으면 주어진 식은

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\pi+x)}{ax+b} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} (ax+b)=0, \quad -\frac{\pi}{2}a+b=0$$

$$\therefore b=\frac{\pi}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①을 ①에 대입하면 $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\pi+x)}{ax+\frac{\pi}{2}a} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{C}$

$x+\frac{\pi}{2}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 ②은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{at} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{at} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \\ &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

$-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ 이므로 $a=-2$

이것을 ②에 대입하면 $b=-\pi$

따라서 $f(x)=-2x-\pi$ 이므로

$$f(2\pi)=-4\pi-\pi=-5\pi$$

답 ①

0212 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서

$\triangle ABC \sim \triangle HAC$ 이므로 $\angle CAH = \theta$ 이다.

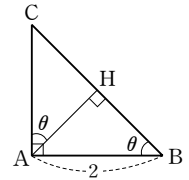
$\triangle ABH$ 에서 $\overline{AH} = 2 \sin \theta$

$\triangle AHC$ 에서 $\overline{CH} = \overline{AH} \cdot \tan \theta$

$$= 2 \sin \theta \tan \theta$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{CH}}{\theta^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \theta \tan \theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\tan \theta}{\theta} = 2$$



답 2

0213 $\angle POB = \theta$ 로 놓으면

$$\triangle OBP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\widehat{PB} = 1 \cdot \theta = \theta$$

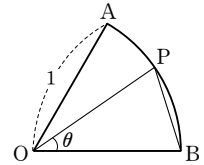
점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때

$\theta \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\widehat{PB}}{\triangle OBP} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\frac{1}{2} \sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin \theta}{\theta}}$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

답 ⑤



0214 오른쪽 그림과 같이 점 A에서

$\overline{OP}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH} = \cos \theta$ 이고 $\overline{OH} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{OP} = 2 \cos \theta$$

$$\therefore \overline{PB} = 2 - 2 \cos \theta$$

$$= 2(1 - \cos \theta)$$

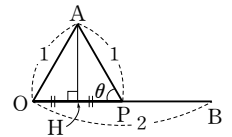
[40% 배점]

점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때 $\theta \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\overline{PB}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \\ &= 2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

[60% 배점]

답 1



0215 $\angle APO = \angle OPQ = \theta$ 라 하면

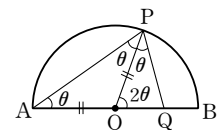
$\angle PAO = \theta$ 이므로

$$\angle POQ = 2\theta$$

$\triangle OPQ$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OQ}}{\sin \theta} = \frac{\overline{OP}}{\sin(\pi - 3\theta)}, \quad \frac{\overline{OQ}}{\sin \theta} = \frac{3}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore \overline{OQ} = \frac{3 \sin \theta}{\sin 3\theta}$$



점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때 $\theta \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \overline{AQ} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} (\overline{AO} + \overline{OQ}) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(3 + \frac{3 \sin \theta}{\sin 3\theta} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \right) \\ &= 3 + 1 \cdot 1 = 4\end{aligned}$$

답 4

0216 $\angle OPA = \pi - 4\theta$ 이므로 $\triangle POA$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sin(\pi - 4\theta)} &= \frac{\overline{OP}}{\sin 3\theta}, \quad \frac{2}{\sin 4\theta} = \frac{\overline{OP}}{\sin 3\theta} \\ \therefore \overline{OP} &= \frac{2 \sin 3\theta}{\sin 4\theta} \\ \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \overline{OP} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3\theta}{\sin 4\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \cdot \frac{4\theta}{\sin 4\theta} \cdot \frac{3}{4} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ③

0217 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\widehat{AB} = r\theta$$

$\triangle OAB$ 에서 제이코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos \theta \\ &= 2r^2 - 2r^2 \cos \theta = 2r^2(1 - \cos \theta) \\ &= 2r^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2r \sin \frac{\theta}{2} \quad (\because \sin \frac{\theta}{2} > 0)$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{r\theta}{2r \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 1\end{aligned}$$

답 1

0218 원 O 의 반지름의 길이를 R 라 하면 $\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R \quad \therefore \overline{AB} = 2R \sin \frac{\pi}{3}$$

$\triangle APC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AP}}{\sin(\frac{\pi}{3} + \theta)} = 2R \quad \therefore \overline{AP} = 2R \sin(\frac{\pi}{3} + \theta)$$

또, $\triangle BPC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BP}}{\sin \theta} = 2R \quad \therefore \overline{BP} = 2R \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\overline{AP} - \overline{AB}}{\overline{BP}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2R \sin(\frac{\pi}{3} + \theta) - 2R \sin \frac{\pi}{3}}{2R \sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + \theta) - \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

0219 $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{1-x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2} \\ &= e^{-2} = \frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

답 ①

0220 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^6 = e^6$

답 ⑤

$$\begin{aligned}\text{0221} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan x)^{\frac{1}{\tan x}} \quad \dots\dots \text{㉠}\end{aligned}$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 ㉠은

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+2t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+2t)^{\frac{1}{2t}}\}^2 = e^2$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}\text{0222} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right\}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdots \frac{2n+1}{2n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}\end{aligned}$$

답 ②

0223 $-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{2x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^{-2} \\ &= e^{-2} = \frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{e^2}$

0224 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \\ &= e \cdot 1 = \boxed{e}\end{aligned}$$

답 ④

0225 $\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{4^x \left(1 - \frac{3^x}{4^x}\right)\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} (4^x)^{\frac{1}{2x}} \cdot \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}} \\ &= 2 \cdot 1 = 2\end{aligned}$$

답 ④

0226 $3 > e$ 이므로 주어진 식의 분모, 분자를 3^x 으로 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \left(\frac{e}{3}\right)^x}{1 + \left(\frac{e}{3}\right)^x} = 3$$

답 ③

0227 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $e^x \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x - 1}{2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{2x + 1} + \frac{x - 1}{2x + 1}\right) \\ &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0228 분모, 분자를 3^{x-1} 으로 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 3^{x+1} + 2}{3^{x-1} - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 3^2 + \frac{2}{3^{x-1}}}{1 - \frac{4}{3^{x-1}}} = 9a \quad [60\% \text{ 배점}]$$

따라서 $9a = 18$ 이므로 $a = 2$

[40% 배점]
답 2

0229 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{1}{x}} + a}{2^{\frac{1}{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{1}{x}} + a}{2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{2^{\frac{1}{x}} + a}{2^{\frac{1}{x}}}$

(i) $x \rightarrow +0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty \text{이므로} \quad \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} 2 \cdot \frac{2^{\frac{1}{x}} + a}{2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +0} 2 \left(1 + \frac{a}{2^{\frac{1}{x}}}\right) = 2$$

$$\therefore b = 2$$

(ii) $x \rightarrow -0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty \text{이므로} \quad \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$$

이 때, 극한값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -0} 2 \cdot \frac{2^{\frac{1}{x}} + a}{2^{\frac{1}{x}}} = 2$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -0} (2^{\frac{1}{x}} + a) = 0$$

$$\therefore a = 0$$

(i), (ii)에서 $a = 0$, $b = 2$ 이므로

$$a + b = 2$$

답 ⑤

0230 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} = \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{3^x - 3^{-x}} = 0$$

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{x}}} = \infty$$

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{\sqrt{3^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x = 0$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

0231 (i) $x \rightarrow +0$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

(ii) $x \rightarrow -0$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

따라서 극한값은 존재하지 않는다.

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}$$

따라서 극한값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 ①

$$\begin{aligned}
0232 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} (\log_2 |x^2 - 1| - \log_2 |x^3 - 1|) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \right| \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \right| \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{x+1}{x^2+x+1} \right| \\
&= \log_2 \frac{2}{3} = 1 - \log_2 3
\end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
0233 \quad & \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 x = -\infty \\
& \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0 \\
& \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 \sin \frac{1}{x} = -\infty \\
& \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 \frac{2x^2 - 5x}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_4 \frac{2 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}} \\
& = \log_4 2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

$$\begin{aligned}
0234 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} (\log_2 |x^2 + 4x - 12| - \log_2 |\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}|) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{x^2 + 4x - 12}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}} \right| \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{(x-2)(x+6)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})} \right| \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{(x-2)(x+6)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{-2(x-2)} \right| \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{(x+6)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2})}{-2} \right| \\
&= \log_2 \frac{8 \cdot 4}{2} \\
&= \log_2 16 = 4
\end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
0235 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot 2 \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}} \cdot 2 \\
&= \frac{1}{1} \cdot 2 = 2
\end{aligned}$$

답 ⑤

0236 주어진 이차방정식의 두 근이 $f(t)$, $g(t)$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$f(t) + g(t) = \sin t, f(t)g(t) = \ln(1+2t) \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{f(t)} + \frac{1}{g(t)} \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) + g(t)}{f(t)g(t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\ln(1+2t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{2t}{\ln(1+2t)} \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad [60\% \text{ 배점}]
\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
0237 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{2+3x}{2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+\frac{3}{2}x}{1+\frac{1}{2}x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \ln \left(1 + \frac{3}{2}x \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{2}x \right) \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{2}x \right)}{x} - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2}x \right)}{x} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{2}x \right)}{\frac{3}{2}x} \cdot \frac{3}{2} - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2}x \right)}{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} \right\} \\
&= 1 \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
0238 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln(x+2) - \ln x \} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+2}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \cdots \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$\frac{2}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} \cdot \ln(1+t) &= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \\
&= 2 \cdot 1 = 2
\end{aligned}$$

답 2

0239 $-\cot x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \tan x \ln(1 - \cot x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{t} \right) \cdot \ln(1+t) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \\
&= -1 \cdot 1 = -1
\end{aligned}$$

답 ②

0240 $\sqrt[n]{x} - 1 = t$ 로 놓으면 $\sqrt[n]{x} = 1 + t \quad \therefore x = (1+t)^n$
양변에 자연로그를 취하면

$$\ln x = n \ln(1+t) \quad \therefore n = \frac{\ln x}{\ln(1+t)}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(1+t)} \cdot t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{\ln(1+t)}{t}} \\
&= \ln x
\end{aligned}$$

답 ④

0241 $e^x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1+e^{-x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = 1$$

답 ②

0242 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x+1} \left(\ln \frac{x^2-x-1}{x^2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x+1} \ln\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$-\frac{x^2}{x+1}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (-2t) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-2) \cdot t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$= -2 \cdot 1 = -2$$

[60% 배점]

답 -2

0243 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+5x)}{\tan 25x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+5x)}{5x} \cdot \frac{25x}{\tan 25x} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{\ln 5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \ln 5}$$

답 ①

0244 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+4x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+4x)}{4x} \cdot 2$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot 2 = \frac{2}{\ln 3}$$

답 ③

0245 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+t)}{t}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}$$

답 ④

0246 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2}$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

답 ④

0247 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^{-4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1-(e^{-4x}-1)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{x} - \frac{e^{-4x}-1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2 - \frac{e^{-4x}-1}{-4x} \cdot (-4) \right\}$$

$$= 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) = 6$$

답 6

0248 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2}$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

답 ④

0249 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 2x} - 1}{x \ln(1+x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 2x} - 1}{x \sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot 2$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

답 ④

0250 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - e^{x-1}}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^3 - e^t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - e^t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 3t^2 + 3t - (e^t - 1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2 + 3t + 3 - \frac{e^t - 1}{t} \right)$$

$$= 3 - 1 = 2$$

답 ⑤

0251 $x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{3-x} - e}{\sin(x-2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{3-(t+2)} - e}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(e^{-t} - 1)}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} e \cdot \frac{e^{-t} - 1}{-t} \cdot \frac{t}{\sin t} \cdot (-1)$$

$$= e \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -e$$

답 ②

0252 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + a) = 0, \quad 1 + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{3x}{\tan 3x} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

따라서 $b = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$$

답 ①

0253 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax+b} - 1) = 0, \quad e^b = 1$$

$$\therefore b = 0$$

[30% 배점]

$b = 0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+cx)}{e^{ax}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+cx)}{cx} \cdot \frac{ax}{e^{ax}-1} \cdot \frac{c}{a}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$$

[30% 배점]

따라서 $\frac{c}{a}=5$ 이므로 $c=5a$ [30% 배점]

$$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{5a}{a} = 5$$
 [10% 배점]

답 5

0254 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2a+x} - b) = 0, \quad e^{2a} - b = 0$$

$$\therefore b = e^{2a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b = e^{2a}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2a+x} - e^{2a}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2a}(e^x - 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2a}}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= \frac{e^{2a}}{2} \cdot 1 = \frac{e^{2a}}{2}$$

따라서 $\frac{e^{2a}}{2} = e^2$ 이므로 $e^{2a} = 2e^2$

$\textcircled{1}$ 에서 $b = 2e^2$ [답 ⑤]

0255 $\sin x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{3 \sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{3^t - 1}{t}$$

$$= \frac{\ln 3}{3} \quad \text{[답 ④]}$$

0256 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{5^x - 1}{x}} = \frac{1}{\ln 5}$ [답 $\frac{1}{\ln 5}$]

0257 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{\log_2(1+x)\}(4^x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} \cdot \frac{4^x - 1}{x}$

$$= \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln 4 = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2 \ln 2$$

$$= 2 \quad \text{[답 ④]}$$

0258 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 3^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - (3^{-x} - 1)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{3^{-x} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{3^{-x} - 1}{-x} \right)$$

$$= 1 + \ln 3 = \ln 3e \quad \text{[답 ⑤]}$$

0259 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x + 4^x - 2^{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1 + 4^x - 1 - 2 \cdot 2^x + 2}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{8^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} - \frac{2(2^x - 1)}{x} \right\}$$

$$= \ln 8 + \ln 4 - 2 \ln 2 = \ln 8$$

$\therefore a = 8$ [답 ③]

0260 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)(e^{\frac{2}{x}} - 1) = 10$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}} \cdot 2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}}$ 에서 $\frac{2}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$

이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 10$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \quad \text{[답 ②]}$$

0261 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{f(n)} = e^3$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{f(n)} = \ln e^3, \quad f(n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 3$$

$$\therefore f(n) = \frac{3}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 3 \quad \text{[답 ⑤]}$$

0262 $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 1$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) \cdot \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$$

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{2}{x} \right)$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{2}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2}{x} = -\infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x}$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하는 함수 $g(x)$ 는 ㄱ, ㄷ이다. [답 ②]

0263 $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ 의 극한값이 존재하므로 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \{1+10f(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\ln \{1+10f(x)\}}{10f(x)} \cdot 10f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 10 \cdot xf(x) \cdot \frac{\ln \{1+10f(x)\}}{10f(x)} \\ &= 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \end{aligned}$$

답 ④

0264 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)\pi}{x-1}$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)\pi}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t\pi}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t\pi}{\pi t} \cdot \pi \\ &= 1 \cdot \pi = \pi \end{aligned}$$

따라서 $f(1)=a$ 이므로 $a=\pi$

답 π

0265 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\pi, \pi)$ 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다. 즉, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\tan x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

0266 $x^2 f(x) = \cos x - \cos 5x$ 에서 $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos 5x}{x^2}$$

[20% 배점]

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x^2}$$

[30% 배점]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin(-2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 6$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = 12$$

[50% 배점]

답 12

0267 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=\pi$ 에서도 연속이어야 하므로

$$f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{a - \cos x}{(\pi - x)^2} \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow \pi$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (a - \cos x) = 0, \quad a + 1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{을 } ① \text{에 대입하면} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1 - \cos x}{(\pi - x)^2}$$

이 때, $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$b = \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{1 + \cos(\pi + t)}{(-t)^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t^2(1 + \cos t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{\sin^2 t}{t^2(1 + \cos t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-1) \cdot \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos t}$$

$$= -1 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

답 ⑤

0268 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다. 즉, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 이므로

$$k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \cdot 2$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

답 ④

0269 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다. 즉, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 이므로

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\tan x}}$$

$$= e^1 = e$$

답 ②

0270 $(\ln x - 1)f(x) = ex - e^2$ 에서 $x \neq e$ 일 때

$$f(x) = \frac{ex - e^2}{\ln x - 1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=e$ 에서 연속이므로

$$f(e) = \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \frac{ex - e^2}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{e(x-e)}{\ln x - 1}$$

$x - e = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow e$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$f(e) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{et}{\ln(e+t) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{et}{\ln(e+t) - \ln e}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{et}{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^2}{\frac{t}{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}}$$

$$= e^2$$

답 ③

0271 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다. 즉, $f(0)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2a^2 - a &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{\frac{(e^{3x} - 1)}{3x}} \\ &= \frac{a}{3} \cdot 1 = \frac{a}{3} \end{aligned}$$

따라서 $2a^2 - a = \frac{a}{3}$ 이므로 $6a^2 - 4a = 0$

$$2a(3a - 2) = 0$$

$$\therefore a = \frac{2}{3} \quad (\because a > 0)$$

답 ②

0272 $\sin^{-1} \frac{x}{2} = h$ 로 놓으면

$$\frac{x}{2} = \sin h \quad \therefore x = 2 \sin h$$

또, $x \rightarrow 0$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} \frac{x}{2}}{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2 \sin h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin h} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

0273 $x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin 3x}{1 - 2 \cos x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin(3t + \pi)}{1 - 2 \cos(t + \frac{\pi}{3})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3} \sin 3t}{1 - 2(\cos t \cos \frac{\pi}{3} - \sin t \sin \frac{\pi}{3})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3} \sin 3t}{1 - \cos t + \sqrt{3} \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3} \sin 3t}{2 \sin^2 \frac{t}{2} + 2\sqrt{3} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3} \sin 3t}{2 \sin \frac{t}{2} (\sin \frac{t}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{t}{2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin 3t}{3t} \cdot \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{t}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{t}{2}} \cdot 6 \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 = -3 \end{aligned}$$

답 ①

0274 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^n}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^n \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^n \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x) (1 + \cos x)}{x^n \cdot \cos x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^n \cdot \cos x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \cdot \frac{1}{x^{n-3}} \cdot \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \end{aligned}$$

이 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

이고, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^n}$ 가 0이 아닌 값 a 에 수렴하므로

$$n - 3 = 0$$

$$\therefore n = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^n} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\alpha + n = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

답 ②

0275 $-1 < \cos x < 1$ 이므로

$$S = \frac{1}{1 - \cos x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + b)S = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + b}{1 - \cos x} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + b) = 0$$

$$\therefore b = 0$$

$b = 0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 (1 + \cos x)}{(1 - \cos x) (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot (1 + \cos x) \\ &= a \cdot 1^2 \cdot 2 = 2a \end{aligned}$$

따라서 $2a = 4$ 이므로 $a = 2$

$$\therefore a + b = 2 + 0 = 2$$

답 2

$$\begin{aligned}
 0276 \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\sin x)}{\log x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x} \cdot x\right)}{\log x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log \frac{\sin x}{x} + \log x}{\log x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\log \frac{\sin x}{x}}{\log x} + 1 \right) \\
 &= 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

답 ④

0277 오른쪽 그림에서 $\angle TOQ = \theta$ 로 놓으면 $\triangle TOP$ 에서

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= 2 \cos \theta \\
 \therefore \overline{PA} &= 2 - 2 \cos \theta \\
 \triangle TOP \sim \triangle QTP &\text{이므로} \\
 \angle QTP &= \theta \\
 \triangle TOP \text{에서 } \overline{TP} &= 2 \sin \theta \\
 \triangle QTP \text{에서 } \overline{PQ} &= \overline{TP} \tan \theta = 2 \sin \theta \tan \theta \\
 \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin \theta \tan \theta}{2 - 2 \cos \theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \tan \theta (1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \tan \theta (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta (1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\tan \theta}{\theta} \cdot (1 + \cos \theta) \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2
 \end{aligned}$$

답 ③

0278 오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2 가 서로 외접하면서 큰 원 C 에 내접하므로

$$\begin{aligned}
 \angle C_1 C C_2 &= \frac{2\pi}{n} \\
 \frac{\pi}{n} &= \theta \text{라 하면} \\
 (1 - r_n) \sin \theta &= r_n \\
 (1 + \sin \theta) r_n &= \sin \theta \\
 \therefore r_n &= \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \\
 n \rightarrow \infty \text{일 때 } \theta &\rightarrow 0 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot r_n &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \\
 &= \pi \cdot 1 = \pi
 \end{aligned}$$

답 ⑤

0279 원의 중심을 C 라 하면

$C(0, 1-r)$ 이고 $r = \overline{CP}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 r^2 &= a^2 + [b - (1-r)]^2 \\
 2(1-b)r &= a^2 + (1-b)^2 \\
 \therefore r &= \frac{a^2}{2(1-b)} + \frac{1-b}{2} \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

또, 점 P 가 곡선 $y = \cos 2x$ 위의 점이므로

$$b = \cos 2a$$

이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{a^2}{2(1 - \cos 2a)} + \frac{1 - \cos 2a}{2} \\
 &= \frac{a^2}{4 \sin^2 a} + \frac{1 - \cos 2a}{2}
 \end{aligned}$$

점 P 가 점 A 에 한없이 가까워질 때 $a \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} r &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{4 \sin^2 a} + \frac{1 - \cos 2a}{2} \right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{\sin a} \right)^2 + \frac{1 - \cos 2a}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 1^2 + 0 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 0280 \quad \ln f_n(x) &= \ln(1+x)(1+2x)(1+3x) \cdots (1+nx) \\
 &= \ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ln(1+3x) \\
 &\quad + \cdots + \ln(1+nx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a_n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f_n(x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \{ \ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ln(1+3x) \\
 &\quad + \cdots + \ln(1+nx) \} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot 2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3 + \cdots + \frac{\ln(1+nx)}{nx} \cdot n \right\} \\
 &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n(n+1)}{2n^2} = 5$$

답 ⑤

0281 $y = 3 \ln x + 2$ 로 놓으면 $3 \ln x = y - 2$

$$\ln x = \frac{y-2}{3} \quad \therefore x = e^{\frac{y-2}{3}}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = e^{\frac{x-2}{3}}$

따라서 $g(x) = e^{\frac{x-2}{3}}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{\sin(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{x-2}{3}} - 1}{\sin(x-2)} \dots \textcircled{1}$$

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 ㉠은

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{t}{3}} - 1}{\sin t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{t}{3}} - 1}{\frac{t}{3}} \cdot \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{1}{3} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ②

0282 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 $\triangle APB$ 는 직각삼각형이다.

따라서 $P(t, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -1} \frac{BP}{AP} &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\log_a(t+2)}{t+1} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

에서 $t+1=z$ 라 하면 $t \rightarrow -1$ 일 때 $z \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -1} \frac{\log_a(t+2)}{t+1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log_a(z+1)}{z} \\ &= \frac{1}{\ln a} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\ln a = \frac{3}{2} \quad \therefore a = e^{\frac{3}{2}}$$

답 ⑤

0283 $f(x) = x^2 - 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x)}{\tan f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - 2 \tan x}{\tan(x^2 - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(\tan x - 2)}{\tan(x^2 - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{x^2 - 2x}{\tan(x^2 - 2x)} \cdot (\tan x - 2) \cdot \frac{1}{x - 2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

답 ③

0284 $f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \dots + \frac{\sin nx}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \dots + \frac{\sin nx}{nx} \cdot n} \\ &= \frac{1}{1 + 2 + \dots + n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

[60% 배점]

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} f(k) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{20}{11}\end{aligned}$$

따라서 $a=20$, $b=11$ 이므로

$$a+b=31$$

[40% 배점]

답 31

0285 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$$\begin{aligned}&= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 1^2 + 1^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= 2 - 2\cos\theta \\ &= 2(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

[30% 배점]

$$\begin{aligned}\therefore |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (\because |\vec{a} - \vec{b}| \geq 0)\end{aligned}$$

[30% 배점]

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\theta)}{|\vec{a} - \vec{b}|} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\theta)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} \cdot \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

[40% 배점]

답 1

0286 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 10$ 에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot (1 + \cos x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot 1^2 \cdot 2 = 10\end{aligned}$$

[30% 배점]

[30% 배점]

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$$

[40% 배점]

답 5

III. 미분법

03 여러 가지 함수의 미분법

$$\begin{aligned} 0287 \quad y' &= \frac{(2x-3)'(3x+2) - (2x-3)(3x+2)'}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{2(3x+2) - (2x-3) \cdot 3}{(3x+2)^2} = \frac{13}{(3x+2)^2} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0288 \quad y' &= \frac{(x^2+3)'(x-1) - (x^2+3)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x(x-1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$0289 \quad y' = -\frac{(x-2)'}{(x-2)^2} = -\frac{1}{(x-2)^2} \quad \cdots \text{답}$$

$$0290 \quad y' = \frac{(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{2x}{(x^2+3)^2} \quad \cdots \text{답}$$

$$0291 \quad y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0292 \quad y &= -\frac{1}{x^3} = -x^{-3} \circ \text{이므로} \\ y' &= -(-3)x^{-3-1} = 3x^{-4} = \frac{3}{x^4} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0293 \quad y &= 3x^3 + \frac{2}{x^5} = 3x^3 + 2x^{-5} \circ \text{이므로} \\ y' &= 3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot (-5)x^{-5-1} \\ &= 9x^2 - 10x^{-6} = 9x^2 - \frac{10}{x^6} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0294 \quad y' &= 5(2x+1)^4 \cdot (2x+1)' \\ &= 5(2x+1)^4 \cdot 2 \\ &= 10(2x+1)^4 \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0295 \quad y' &= 2(5x^2-3x+1) \cdot (5x^2-3x+1)' \\ &= 2(5x^2-3x+1)(10x-3) \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0296 \quad y &= (3-x)^{-4} \circ \text{이므로} \\ y' &= -4(3-x)^{-5} \cdot (3-x)' \\ &= -4(3-x)^{-5} \cdot (-1) = \frac{4}{(3-x)^5} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0297 \quad y' &= \{(-2x+1)^2\}'(x^2+1) + (-2x+1)^2(x^2+1)' \\ &= 2(-2x+1)(-2x+1)'(x^2+1) + (-2x+1)^2 \cdot 2x \\ &= -4(-2x+1)(x^2+1) + 2x(-2x+1)^2 \\ &= -2(-2x+1)\{2(x^2+1) - x(-2x+1)\} \\ &= -2(-2x+1)(4x^2-x+2) \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0298 \quad y &= \frac{-x+3}{x^2-3x+2} = (-x+3)(x^2-3x+2)^{-1} \circ \text{이므로} \\ y' &= (-x+3)'(x^2-3x+2)^{-1} \\ &\quad + (-x+3)\{(x^2-3x+2)^{-1}\}' \\ &= -(x^2-3x+2)^{-1} \\ &\quad + (-x+3) \cdot (-1) \cdot (x^2-3x+2)^{-2}(2x-3) \\ &= \frac{-1}{x^2-3x+2} + \frac{(x-3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} \\ &= \frac{x^2-6x+7}{(x^2-3x+2)^2} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0299 \quad x^2+y^2 &= 1 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ 2x+2y \frac{dy}{dx} &= 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0300 \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= 1 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ \frac{2}{9}x + \frac{1}{2}y \frac{dy}{dx} &= 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0301 \quad x^2 - \frac{y^2}{2} &= 1 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ 2x - y \frac{dy}{dx} &= 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0302 \quad xy &= 1 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ y + x \frac{dy}{dx} &= 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0303 \quad x^3 - y^2 + 2xy - 3 &= 0 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ 3x^2 - 2y \frac{dy}{dx} + 2y + 2x \frac{dy}{dx} &= 0 \\ (2x-2y) \frac{dy}{dx} &= -3x^2 - 2y \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{-3x^2 - 2y}{2x-2y} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0304 \quad y &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \circ \text{이므로} \\ y' &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0305 \quad y &= x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \circ \text{이므로} \\ y' &= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0306 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$ 이므로

$$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \quad \dots \text{답}$$

0307 $y = \sqrt{x}(1+x^2) = \sqrt{x} + x^2\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{2}x\sqrt{x} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

0308 $y = \sqrt{3x^2-1} = (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3x^2-1)' = \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x \\ &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2-1}} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

0309 $y = (x^2-1)\sqrt{x-2} = (x^2-1)(x-2)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x-2)^{\frac{1}{2}} + (x^2-1) \cdot \frac{1}{2}(x-2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x-2)' \\ &= 2x(x-2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{4x(x-2) + x^2-1}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}} \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

0310 $x=y^3$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = 3y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} \quad \dots \text{답}$$

0311 $y = \sqrt[4]{x+1}$ 에서 $y^4 = x+1$ 이므로 양변을 y 에 대하여 미분하

면 $4y^3 = \frac{dx}{dy} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{4y^3} \quad \dots \text{답}$

0312 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = x, \text{ 즉 } f(g(x)) = x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \quad \therefore f'(g(a))g'(a) = 1$$

$$g(a) = b \text{이므로} \quad g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))} = \frac{1}{f'(b)}$$

답 ③

0313 $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 2t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t \quad \dots \text{답}$$

0314 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 3t^2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{-\frac{1}{t^2}} = -3t^4 \quad \dots \text{답}$$

0315 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = 4(2t+1)^3 \cdot 2 = 8(2t+1)^3$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8(2t+1)^3}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} \\ &= 16\sqrt{t}(2t+1)^3 \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

0316 $y' = \cos x - 2 \sin x \quad \dots \text{답}$

0317 $y' = \sec x \tan x - (-\operatorname{cosec} x \cot x)$
 $= \sec x \tan x + \operatorname{cosec} x \cot x \quad \dots \text{답}$

0318 $y' = 2 \sec^2 x - (-\operatorname{cosec}^2 x)$
 $= 2 \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \quad \dots \text{답}$

0319 $y' = \cos(x^2-1) \cdot (x^2-1)'$
 $= 2x \cos(x^2-1) \quad \dots \text{답}$

0320 $y' = \sec^2 \sqrt{1-x^2} \cdot (\sqrt{1-x^2})'$
 $= \sec^2 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$
 $= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sec^2 \sqrt{1-x^2} \quad \dots \text{답}$

0321 $y' = -\sin(\sin x) \cdot (\sin x)'$
 $= -\sin(\sin x) \cdot \cos x \quad \dots \text{답}$

0322 $y' = 2x \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)$
 $= x(2 \cos x - x \sin x) \quad \dots \text{답}$

0323 $y' = \sec^2 x \cdot \sec x + \tan x \cdot \sec x \tan x$
 $= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x)$
 $= \sec x(\sec^2 x + \sec^2 x - 1)$
 $= \sec x(2 \sec^2 x - 1) \quad \dots \text{답}$

0324 $y' = \frac{\sin x(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$
 $= \frac{2 \sin x}{(1+\cos x)^2} \quad \dots \text{답}$

0325 $y' = 5(1+\cos x)^4 \cdot (1+\cos x)'$
 $= -5 \sin x(1+\cos x)^4 \quad \dots \text{답}$

$$\begin{aligned} 0326 \quad y' &= 3 \sin^2 x (\sin x)' \cos^2 x + \sin^3 x \cdot 2 \cos x (\cos x)' \\ &= 3 \sin^2 x \cos x \cos^2 x + \sin^3 x \cdot 2 \cos x (-\sin x) \\ &= \sin^2 x \cos x (3 \cos^2 x - 2 \sin^2 x) \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0327 \quad y' &= \frac{(1-2 \sin x)'}{2\sqrt{1-2 \sin x}} = \frac{-2 \cos x}{2\sqrt{1-2 \sin x}} \\ &= -\frac{\cos x}{\sqrt{1-2 \sin x}} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$0328 \quad y' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x} \quad \cdots \text{답}$$

$$0329 \quad y' = e^x + x e^x \quad \cdots \text{답}$$

$$0330 \quad y' = \frac{e^x(e^x-1) - e^x \cdot e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0331 \quad y' &= 3(x^2 + e^x)^2 \cdot (x^2 + e^x)' \\ &= 3(x^2 + e^x)^2 (2x + e^x) \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$0332 \quad y' = 3 \cdot 2^x \ln 2 \quad \cdots \text{답}$$

$$0333 \quad y' = 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 \cdot (x^2+1)' = 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 \cdot 2x \quad \cdots \text{답}$$

$$0334 \quad y' = 4 \cdot 3^x + 4x \cdot 3^x \ln 3 = 4 \cdot 3^x (x \ln 3 + 1) \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0335 \quad y' &= \frac{2 \cdot 3^x - 2x \cdot 3^x \ln 3}{3^{2x}} = \frac{2 \cdot 3^x (1 - x \ln 3)}{3^{2x}} \\ &= \frac{2(1 - x \ln 3)}{3^x} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$0336 \quad y' = \frac{(2x)'}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \quad \cdots \text{답}$$

$$0337 \quad y' = \ln 3x + x \cdot \frac{3}{3x} = \ln 3x + 1 \quad \cdots \text{답}$$

$$0338 \quad y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x \ln x}{x e^x} \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0339 \quad y' &= 2(\ln x - 2x + 1) \cdot (\ln x - 2x + 1)' \\ &= 2(\ln x - 2x + 1) \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$0340 \quad y' = \frac{2}{x \ln 10} - 1 \quad \cdots \text{답}$$

$$0341 \quad y' = \frac{(5x)'}{5x \ln 2} = \frac{5}{5x \ln 2} = \frac{1}{x \ln 2} \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0342 \quad y' &= -\frac{(\log 2x)'}{(\log 2x)^2} = -\frac{1}{(\log 2x)^2} \cdot \frac{2}{2x \ln 10} \\ &= -\frac{1}{x \ln 10 (\log 2x)^2} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0343 \quad y' &= 2 \log_3 x \cdot (\log_3 x)' = 2 \log_3 x \cdot \frac{1}{x \ln 3} \\ &= \frac{2 \log_3 x}{x \ln 3} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0344 $y = x^n$ 의 양변의 절대값에 자연로그를 취하면
 $\ln |y| = \ln |x^n|$, 즉 $\ln |y| = n \ln |x|$
 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = n \cdot \frac{1}{x} \cdot y = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = nx^{n-1} \quad \cdots \text{증명 끝}$$

$$0345 \quad y' = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} \quad \cdots \text{답}$$

$$0346 \quad y' = -e x^{-e-1} = -\frac{e}{x^{e+1}} \quad \cdots \text{답}$$

$$0347 \quad y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0348 \quad y' &= \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x \text{이므로} \\ y'' &= 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = -4 \sin 2x \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0349 \quad y' &= e^{-3x} \cdot (-3x)' = -3e^{-3x} \text{이므로} \\ y'' &= -3 \cdot e^{-3x} \cdot (-3) = 9e^{-3x} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$0350 \quad y' = \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0351 \quad y' &= \frac{(8x-4)(2x-1) - (4x^2-4x+3) \cdot 2}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{8x^2-8x-2}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x-1)^2-4}{(2x-1)^2} \\ &= 2 + \frac{-4}{(2x-1)^2} \\ \therefore k &= -4 \end{aligned}$$

다른 풀이 $y = \frac{4x^2-4x+3}{2x-1} = \frac{(2x-1)^2+2}{2x-1}$
 $= 2x-1 + \frac{2}{2x-1}$

$$\text{이므로} \quad y' = 2 + \frac{-4}{(2x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} 0352 \quad y' &= \frac{2x(3x-2) - x^2 \cdot 3}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{3x^2-4x}{(3x-2)^2} \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0353 \quad f(x) &= \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1} \text{에서} \\ f'(x) &= \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \\ \therefore f'(\sqrt{3}) &= \frac{-2(3+1)}{(3-1)^2} = -2 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0354 \quad f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+5) - (x+2) \cdot 2x}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2} \end{aligned} \quad [50\% \text{ 배점}]$$

$f'(x) \geq 0$ 에서 $-x^2-4x+5 \geq 0$, $x^2+4x-5 \leq 0$
 $(x+5)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -5 \leq x \leq 1$ [30% 배점]
 따라서 $f'(x) \geq 0$ 을 만족하는 정수 x 는 $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ 의 7개이다. [20% 배점]

답 7

$$\begin{aligned} 0355 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2h) - f(0)\} - \{f(-3h) - f(0)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \cdot 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3h) - f(0)}{-3h} \cdot (-3) \\ &= f'(0) \cdot 2 - f'(0) \cdot (-3) = 5f'(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{x-1} \text{에서 } f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \text{이므로} \\ 5f'(0) &= 5 \cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0356 \quad g'(x) &= -\frac{\{1 - xf(x)\}'}{\{1 - xf(x)\}^2} = \frac{f(x) + xf'(x)}{\{1 - xf(x)\}^2} \\ \therefore g'(0) &= \frac{f(0) + 0 \cdot f'(0)}{\{1 - 0 \cdot f(0)\}^2} = f(0) = 1 \end{aligned}$$

답 1

$$\begin{aligned} 0357 \quad f(x) &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \cdots + \frac{10}{x^{10}} \\ &= x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3} + \cdots + 10x^{-10} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^{-2} - 2^2x^{-3} - 3^2x^{-4} - \cdots - 10^2x^{-11} \\ \therefore f'(1) &= -1 - 2^2 - 3^2 - \cdots - 10^2 \\ &= -(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2) \\ &= -\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = -385 \end{aligned}$$

답 ②

$$0358 \quad y = \frac{2x^5 - 3x^3 - 1}{x^3} = 2x^2 - 3 - x^{-3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x - (-3)x^{-4} = 4x + \frac{3}{x^4}$$

답 ④

다른 풀이 $\frac{dy}{dx} = \frac{(10x^4 - 9x^2) \cdot x^3 - (2x^5 - 3x^3 - 1) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$

$$= \frac{4x^7 + 3x^2}{x^6} = 4x + \frac{3}{x^4}$$

$$\begin{aligned} 0359 \quad y' &= 3 \left(\frac{x}{x^2-1} \right)^2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= 3 \left(\frac{x}{x^2-1} \right)^2 \cdot \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-3x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-3x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^4} \end{aligned}$$

따라서 $a = -3$, $b = -3$ 이므로

$$a+b = -6$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0360 \quad y' &= 3(2x-1)^2 \cdot 2 \cdot (3x+1)^5 + (2x-1)^3 \cdot 5(3x+1)^4 \cdot 3 \\ &= 3(2x-1)^2(3x+1)^4\{2(3x+1) + 5(2x-1)\} \\ &= 3(2x-1)^2(3x+1)^4(16x-3) \end{aligned}$$

이므로 $a = 16$, $b = -3$

$$\therefore a+b = 13$$

답 ②

$$\begin{aligned} 0361 \quad y' &= 3\{xf(x)\}^2 \cdot \{xf(x)\}' \\ &= 3\{xf(x)\}^2 \{f(x) + xf'(x)\} \end{aligned}$$

이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$3\{1 \cdot f(1)\}^2 \{f(1) + 1 \cdot f'(1)\} = 3 \cdot 2^2(2+3) = 60$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0362 \quad f(2x-1) &= x^2 - x + 3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(2x-1) \cdot 2 &= 2x-1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(2x-1) = \frac{2x-1}{2}$$

위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(3) = \frac{3}{2}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 0363 \quad f(1-2x) &= f(x) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ -2f'(1-2x) &= f'(x) \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad [40\% \text{ 배점}]$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-2f'(-1) = f'(1) = 4$$

$$\therefore f'(-1) = -2$$

[30% 배점]

①의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-2f'(3) = f'(-1) = -2$$

$$\therefore f'(3) = 1$$

[30% 배점]

답 1

$$\begin{aligned} 0364 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} &= 2 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \text{(분자)} &\rightarrow 0 \text{이다. 즉,} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+1\} = 0$$

$$\therefore f(1) = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= f'(1) = 2 \end{aligned}$$

또, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)+1}{x+1} = 3$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{g(x)+1\} = 0$$

$$\therefore g(-1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = g'(-1) = 3$$

이 때, $y = (g \circ f)(x)$ 에서 $y' = g'(f(x))f'(x)$ 이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$g'(f(1))f'(1) = g'(-1)f'(1) = 3 \cdot 2 = 6$$

답 ③

0365 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 에서 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$\therefore h'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(0)g'(2) \quad \dots\dots ㉠$$

[30% 배점]

이 때, $f'(x) = \frac{3(x^2-1)-3x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{3x^2+3}{(x^2-1)^2}$ 에서

$$f'(0) = -3$$

[30% 배점]

$g'(x) = 3x^2 - 6$ 에서 $g'(2) = 6$

[20% 배점]

따라서 $f'(0)$, $g'(2)$ 의 값을 ㉠에 대입하면

$$h'(2) = -3 \cdot 6 = -18$$

[20% 배점]

답 -18

0366 $f(g(x)) = h(x)$ 로 놓으면

$$h(1) = f(g(1)) = f(1) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x)) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$$

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(1)g'(1)$$

$$= 3 \cdot 4 = 12$$

답 ⑤

0367 $F(x) = (h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$ 에서

$$F'(x) = (h \circ g)'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$f(0) = 0$ 이므로

$$F'(0) = (h \circ g)'(f(0)) \cdot f'(0)$$

$$= (h \circ g)'(0) \cdot f'(0) \quad \dots\dots ㉠$$

이 때, $f'(x) = \frac{-1 \cdot (x^2+1) + x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ 에서

$$f'(0) = -1$$

이므로 ㉠에 대입하면 $F'(0) = (h \circ g)'(0) \cdot (-1)$

$$\therefore (h \circ g)'(0) = -F'(0) = -10$$

답 ①

0368 $f(x)$ 를 $(1-x)^5$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^{10} + ax + b = (1-x)^5 Q(x) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9 + a = 5(1-x)^4 \cdot (-1)Q(x) + (1-x)^5 Q'(x)$$

$$= -5(1-x)^4 Q(x) + (1-x)^5 Q'(x) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + a + b = 0, \quad 10 + a = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = -10, b = 9$

$$\therefore ab = -90$$

답 ①

0369 $f(x)$ 를 $(2x-1)^6$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$256x^9 + ax + b = (2x-1)^6 Q(x) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$9 \cdot 256x^8 + a = 6(2x-1)^5 \cdot 2Q(x) + (2x-1)^6 Q'(x)$$

$$= 12(2x-1)^5 Q(x) + (2x-1)^6 Q'(x)$$

$\dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 양변에 $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \frac{1}{2}a + b = 0, \quad 9 \cdot 256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + a = 0$$

$$\therefore 1 + a + 2b = 0, \quad 9 + a = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = -9, b = 4$

따라서 $f(x) = 256x^9 - 9x + 4$ 이므로

$$f(1) = 256 - 9 + 4 = 251$$

답 ③

0370 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - 3y^2 \frac{dy}{dx} + ay + ax \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3y^2 - ax) \frac{dy}{dx} = 3x^2 + ay \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + ay}{3y^2 - ax}$$

$x=0, y=-1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 2이므로

$$-\frac{a}{3} = 2 \quad \therefore a = -6$$

또, 곡선이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$1 + b = 0 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore ab = (-6) \cdot (-1) = 6$$

답 6

0371 $y^3 + y = x^2 y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2xy + x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 + 1 - x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^2 + 1 - x^2} \quad (\text{단, } 3y^2 + 1 - x^2 \neq 0)$$

답 ①

0372 $y = x\sqrt{f(x)}$ 에서

$$y' = \sqrt{f(x)} + x \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{2f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$x=2$ 에서의 미분계수가 4이므로

$$\frac{2f(2) + 2f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 4, \quad \frac{2 \cdot 9 + 2f'(2)}{2 \cdot 3} = 4$$

$$18 + 2f'(2) = 24 \quad \therefore f'(2) = 3$$

답 ③

0373 $f(x) = \sqrt[3]{2x-4} = (2x-4)^{\frac{1}{3}}$ 이므로
 $f'(x) = \frac{1}{3}(2x-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}}$
 $\therefore f'(-2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$

답 ①

0374 $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{x^2+1} - (1-x) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$
 $= \frac{-(x^2+1) - x(1-x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
 $= \frac{-x-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

답 ④

0375 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
 위의 식에 $x=4, y=4$ 를 대입하면 구하는 접선의 기울기는
 $-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = -1$

답 ①

0376 $f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x - (\sqrt{x^2+1}-1) \cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)}$
 $= \frac{1}{2}$

답 ③

0377 $x = \sqrt{y^2+1} - 2$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면
 $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$
다른 풀이 $x = \sqrt{y^2+1} - 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $1 = \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$

답 ③

0378 $x = \frac{3y}{y^2-1}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면
 $\frac{dx}{dy} = \frac{3(y^2-1) - 3y \cdot 2y}{(y^2-1)^2} = \frac{-3(y^2+1)}{(y^2-1)^2}$
 $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(y^2-1)^2}{-3(y^2+1)}$

따라서 $y=0$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{(-1)^2}{-3 \cdot 1} = -\frac{1}{3}$$

답 ②

0379 점 $(0, 1)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
 $f(0)=1 \quad \therefore g(1)=0$
 또한, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로
 $f'(0)=2$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

답 ②

0380 $g(2)=a$ 라 하면 $f(a)=2$
 $a^3+2a^2+3a-4=2, \quad a^3+2a^2+3a-6=0$
 $(a-1)(a^2+3a+6)=0$
 $\therefore a=1 (\because a^2+3a+6>0)$

따라서 $g(2)=1$ 이고

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$$

이므로

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{10}$$

답 ④

0381 주어진 극한에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-2\} = 0$ 에서

$$g(1)=2 \quad \therefore f(2)=1$$

그런데

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 3$$

이므로

$$f'(2) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{3}$$

답 ③

0382 $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 4t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+4t}{3t^2-t}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2+4t}{3t^2-t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(3t+4)}{t(3t-1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t+4}{3t-1} = -4$$

답 ①

0383 $\frac{dx}{dt} = 2t + \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2}{t^3}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{2}{t^3}}{2t + \frac{1}{t^2}} = \frac{t^3+2}{2t^4+t}$$

따라서 $t=-1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{(-1)^3+2}{2 \cdot (-1)^4 + (-1)} = 1$$

답 ④

0384 $\frac{dx}{dt}=2t+1, \frac{dy}{dt}=t+a$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t+a}{2t+1} \quad [50\% \text{ 배점}]$$

$t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$\frac{1+a}{2+1}=3, \quad 1+a=9$$

$$\therefore a=8 \quad [50\% \text{ 배점}]$$

답 8

0385 $y'=2 \cot x \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x) \cdot \operatorname{cosec} x$
 $+ \cot^2 x \cdot (-\operatorname{cosec} x \cot x)$
 $= -2 \cot x \operatorname{cosec}^3 x - \cot^3 x \operatorname{cosec} x$
 $= -\cot x \operatorname{cosec} x (2 \operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x)$
 $= -\cot x \operatorname{cosec} x [2(1 + \cot^2 x) + \cot^2 x]$
 $= -\cot x \operatorname{cosec} x (3 \cot^2 x + 2)$

이므로 $a=3, b=2$

$$\therefore a+b=5 \quad [50\% \text{ 배점}]$$

답 5

0386 $f(x) = \frac{1+\sec x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} + \frac{\sec x}{\tan x} = \cot x + \operatorname{cosec} x$

이므로

$$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x$$

$$= -\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x)$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = -2-\sqrt{2}$$

답 1

0387 $f'(x) = -\sin x - 2 \sin x \cos x$
 $= -\sin x (1 + 2 \cos x)$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \sin x=0 \text{ 또는 } \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$0 < x < 2\pi \text{이므로} \quad x=\pi \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$\pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 3\pi$$

답 3π

0388 $f(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 3x) - f(\tan 2x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 3x) - f(0) - \{f(\tan 2x) - f(0)\}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 3x) - f(0)}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan 2x) - f(0)}{\tan 2x} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2$$

$$= f'(0) \cdot 1 \cdot 3 - f'(0) \cdot 1 \cdot 2 = f'(0)$$

$$f(x) = \sin x + \tan x \text{에서} \quad f'(x) = \cos x + \sec^2 x$$

$$\therefore f'(0) = 1 + 1 = 2$$

답 2

0389 $\frac{d}{dx}(\sin^5 x \cos 5x)$

$$= 5 \sin^4 x \cos x \cdot \cos 5x + \sin^5 x \cdot (-5 \sin 5x)$$

$$= 5 \sin^4 x (\cos x \cos 5x - \sin x \sin 5x)$$

$$= 5 \sin^4 x \cos(x+5x)$$

$$= 5 \sin^4 x \cos 6x$$

$$\therefore a=6 \quad (\because a>0)$$

답 6

0390 $\frac{d}{dx}(\cos^2 x - 2 \cos x)$

$$= 2 \cos x \cdot (-\sin x) - 2 \cdot (-\sin x) = 2 \sin x (1 - \cos x)$$

$$= 2 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\therefore a=8$$

답 5

0391 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi-h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} + \frac{f(\pi-h) - f(\pi)}{-h} \right]$$

$$= f'(\pi) + f'(\pi) = 2f'(\pi)$$

[50% 배점]

$f(x) = x \cos x$ 에서

$$f'(x) = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\therefore 2f'(\pi) = 2(\cos \pi - \pi \sin \pi) = -2 \quad [20\% \text{ 배점}]$$

답 -2

0392 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{(1-\sin x) - 1} \cdot \frac{-\sin x}{x}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\sin x) - f(1)}{(1-\sin x) - 1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$1 - \sin x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$- \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = -f'(1)$$

$f(x) = \sin \pi x \cos \pi x$ 에서

$$f'(x) = \cos \pi x \cdot \pi \cdot \cos \pi x + \sin \pi x \cdot (-\sin \pi x) \cdot \pi$$

$$= \pi (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = \pi \cos 2\pi x$$

$$\therefore -f'(1) = -\pi \cos 2\pi = -\pi$$

답 1

0393 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{\pi}{6} = \frac{dy}{dx} + \sin xy \cdot \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

위의 식에 $x=3, y=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{\pi}{6} = \frac{dy}{dx} + \sin \frac{3}{2}\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 3 \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{dy}{dx} - \frac{\pi}{2} - 3 \frac{dy}{dx}, \quad 2 \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{3}$$

답 2

0394 $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$

이므로 주어진 식은

$$2 \sin x \cos y = 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2 \cos x \cos y + 2 \sin x (-\sin y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \\ &= \cot x \cot y \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\cot \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4} = 1 \cdot 1 = 1$$

답 ⑤

다른 풀이 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \cos(x-y) \cdot \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \{\cos(x-y) - \cos(x+y)\} \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)}$$

따라서 $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{\cos 0 + \cos \frac{\pi}{2}}{\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

0395 $y = \sin x$ 의 역함수는 $x = \sin y$

양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = \cos y$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

답 ④

0396 $x = \cos y$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

$x = \cos y$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때

$$y = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$-\frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0397 $g(-2) = t$ 라 하면 $f(t) = -2$ 이므로

$$3t - 2 \cos t = -2$$

$$\therefore 2 \cos t = 3t + 2$$

이 때, 오른쪽 그림에서

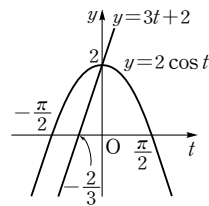
$$t = 0$$

따라서 $g(-2) = 0$ 이고

$$f'(x) = 3 + 2 \sin x$$

이므로

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$



답 ③

0398 $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a \sin t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \cot \frac{t}{2}$$

답 ⑤

0399 $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta + \sin \theta + \theta \cos \theta = \theta \cos \theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - \{\cos \theta + \theta \cdot (-\sin \theta)\} = \theta \sin \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\theta \sin \theta}{\theta \cos \theta} = \tan \theta$$

답 ②

0400 $\frac{dx}{d\theta} = a \cdot 3 \cos^2 \theta \cdot (-\sin \theta) = -3a \cos^2 \theta \sin \theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = a \cdot 3 \sin^2 \theta \cos \theta = 3a \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta} = -\tan \theta$$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$-\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

답 ④

0401 $f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 + 1)e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - (x^2 + 1)}{e^x}$

$$= \frac{-(x-1)^2}{e^x}$$

$$\therefore f(1) - f'(1) = \frac{2}{e} - 0 = \frac{2}{e}$$

답 ⑤

0402 $f(x) = e^{2x} \tan \pi x$ 에서

$$f'(x) = 2e^{2x} \tan \pi x + \pi e^{2x} \sec^2 \pi x$$

$$\therefore f'(0) = \pi$$

답 ③

0403 $x^2+y^2=e^{x+y}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+2y \frac{dy}{dx} = e^{x+y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$(2y - e^{x+y}) \frac{dy}{dx} = e^{x+y} - 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} - 2x}{2y - e^{x+y}} = -\frac{e^{x+y} - 2x}{e^{x+y} - 2y}$$

답 ⑤

0404 $f'(x) = e^{-2x} \sin x + x e^{-2x} \cdot (-2) \cdot \sin x + x e^{-2x} \cos x$
 $= e^{-2x} (\sin x - 2x \sin x + x \cos x)$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} (\sin x - 2x \sin x + x \cos x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-2x} \left(\frac{\sin x}{x} - 2 \sin x + \cos x \right) \\ &= 1 \cdot (1 - 0 + 1) = 2 \end{aligned}$$

답 ⑤

0405 $x \neq 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^2}{e^2(x-1)} = \frac{e^{2x-2} - 1}{x-1}$$

이고 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{x-1}$$

$g(x) = e^{2x-2}$ 으로 놓으면 $g(1) = 1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1)$$

이 때, $g'(x) = 2e^{2x-2}$ 이므로

$$f(1) = g'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

답 ②

0406 $\frac{dy}{dx} = 2^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = 2^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{2}{x^3}$

따라서 $x=1$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$2^{-1} \cdot \ln 2 \cdot 2 = \ln 2$$

답 ⑤

0407 $\frac{dy}{dx} = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot (\sin x)' = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x$

따라서 $x=0$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$1 \cdot \ln 3 \cdot 1 = \ln 3$$

답 ②

0408 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= f'(1) + f'(1) = 2f'(1)$$

$$f(x) = 2^{2x-1} \text{에서 } f'(x) = 2^{2x-1} \cdot \ln 2 \cdot 2 = 2^{2x} \ln 2$$

$$\therefore 2f'(1) = 2 \cdot 2^2 \cdot \ln 2 = 8 \ln 2$$

답 ⑤

0409 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} a e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -0} (\sin \pi x + b) = f(0)$$

$$\therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, $f'(0)$ 의 값이 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 2a e^{2x} & (x > 0) \\ \pi \cos \pi x & (x < 0) \end{cases}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow +0} 2a e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -0} \pi \cos \pi x$

$$\therefore 2a = \pi \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$a + b = \pi \quad \text{답 ④}$$

0410 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (b \cos \frac{\pi}{2} x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (e^{x-1} + a) = f(1)$$

$$2 = 1 + a \quad \therefore a = 1 \quad [30\% \text{ 배점}]$$

또, $f'(1)$ 의 값이 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} b \sin \frac{\pi}{2} x & (x > 1) \\ e^{x-1} & (x < 1) \end{cases}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(-\frac{\pi}{2} b \sin \frac{\pi}{2} x\right) = \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{x-1}$

$$-\frac{\pi}{2} b = 1 \quad \therefore b = -\frac{2}{\pi} \quad [50\% \text{ 배점}]$$

$$\therefore ab = -\frac{2}{\pi} \quad [20\% \text{ 배점}]$$

$$\text{답 } -\frac{2}{\pi}$$

0411 $y' = (x)' \ln |x| + x (\ln |x|)'$

$$= \ln |x| + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \ln |x| + 1$$

답 ③

0412 $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$$= \frac{1}{2} \{ \ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) \}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{-\cos x}{1-\sin x} \right)$$

$$= \frac{\cos x (1-\sin x) + \cos x (1+\sin x)}{2(1-\sin^2 x)}$$

$$= \frac{2 \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

따라서 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서의 미분계수는

$$\sec \frac{\pi}{3} = 2$$

답 ⑤

0413 $f(x) = \log_2(\cos^2 x) = 2 \log_2 |\cos x|$ 이므로

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{-\sin x}{\cos x \cdot \ln 2} = -\frac{2 \tan x}{\ln 2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2 \tan \frac{\pi}{4}}{\ln 2} = -\frac{2}{\ln 2}$$

답 ②

0414 $f'(x) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x \ln 10}$

$$= \frac{\ln 10}{\ln x} \cdot \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\therefore f'(e) = \frac{1}{e}$$

답 ①

0415 $f(x) = \log_4(4x-1)^4 = 4 \log_4 |4x-1|$ 이므로

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{4}{(4x-1) \ln 4} = \frac{8}{(4x-1) \ln 2}$$

$$f'(a) = \frac{2}{\ln 2} \text{에서} \quad \frac{8}{(4a-1) \ln 2} = \frac{2}{\ln 2}, \quad \frac{4}{4a-1} = 1$$

$$4a-1=4 \quad \therefore a = \frac{5}{4}$$

답 5/4

0416 $f(x) = \ln(e^x + e^{2x})$ 으로 놓으면 $f(0) = \ln 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x}) - \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

이 때, $f'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x}}{e^x + e^{2x}}$ 이므로

$$f'(0) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

답 ③

0417 $f(x) = \ln(3^x + 4^x)$ 으로 놓으면 $f(0) = \ln 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{3^x + 4^x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3^x + 4^x) - \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

이 때, $f'(x) = \frac{3^x \ln 3 + 4^x \ln 4}{3^x + 4^x}$ 이므로

$$f'(0) = \frac{\ln 3 + \ln 4}{2} = \frac{1}{2} \ln 12$$

$$= \ln \sqrt{12} = \ln 2\sqrt{3}$$

답 ③

0418 $f(x) = \ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{10x})$ 으로 놓으면

$f(0) = \ln(1+1+1+\dots+1) = \ln 10$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{10x}}{10}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{10x}) - \ln 10}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

이 때, $f'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \dots + 10e^{10x}}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{10x}}$ 이므로

$$f'(0) = \frac{1+2+3+\dots+10}{10} = \frac{55}{10}$$

따라서 $S = \frac{55}{10}$ 이므로 $10S = 55$

답 55

0419 $F(x) = f(\ln x)$ 로 놓으면 $F(1) = f(\ln 1) = f(0)$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\ln(1+2t)) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(1+2t) - F(1)}{(1+2t) - 1} \cdot 2 = 2F'(1)$$

이 때, $F'(x) = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$ 이므로

$$2F'(1) = 2f'(0) = 4 \quad \therefore f'(0) = 2$$

답 2

0420 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = 3 \ln |x-1| - 2 \ln |x| - \ln |x+1|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{3x(x+1) - 2(x-1)(x+1) - x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{4x+2}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= f(x) \cdot \frac{4x+2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} \cdot \frac{4x+2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2(2x+1)(x-1)^2}{x^3(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(2) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 1}{8 \cdot 9} = \frac{5}{36}$$

답 ①

0421 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |y| = \ln |x+2| + 3 \ln |x+1| - 2 \ln |x+3| \quad [30\% \text{ 배점}]$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+3} \\ &= \frac{(x+1)(x+3) + 3(x+2)(x+3) - 2(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x^2 + 13x + 17}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= \frac{2x^2 + 13x + 17}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot y \\ &= \frac{2x^2 + 13x + 17}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot \frac{(x+2)(x+1)^3}{(x+3)^2} \\ &= \frac{(2x^2 + 13x + 17)(x+1)^2}{(x+3)^3} \quad [30\% \text{ 배점}] \end{aligned}$$

$$\text{답 } y' = \frac{(2x^2 + 13x + 17)(x+1)^2}{(x+3)^3}$$

0422 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

답 ⑤

0423 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \ln x^{\ln x} = (\ln x)^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln x \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= y \cdot \frac{2}{x} \ln x = x^{\ln x} \cdot \frac{2}{x} \ln x = 2x^{\ln x - 1} \ln x \end{aligned}$$

따라서 $x=e$ 에서의 미분계수는

$$2e^{\ln e - 1} \ln e = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

답 ④

0424 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln y = x \ln x$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= y(\ln x + 1) = x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

0425 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x) \} \end{aligned}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{-\sin x}{1 + \cos x} \right) \\ &= \frac{2 \sin x}{2(1 - \cos^2 x)} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} \\ &= \operatorname{cosec} x \end{aligned}$$

0426 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos \frac{\pi}{2}} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f(x) = x^{\cos x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^{\cos x} = \cos x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= -\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \\ \therefore f'(x) &= f(x) \left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^{\cos x} \left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos \frac{\pi}{2}} \left(-\sin \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \right) \\ &= -\ln \frac{\pi}{2} = \ln \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

답 ④

0427 $f'(x) = e^{ax+2} + axe^{ax+2} = e^{ax+2}(1+ax)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{ax+2} \cdot a \cdot (1+ax) + e^{ax+2} \cdot a \\ &= ae^{ax+2}(2+ax) \end{aligned}$$

$$f''(0) = 4e^2 \text{이므로 } 2ae^2 = 4e^2$$

$$\therefore a = 2$$

답 ②

0428 $f(x) = e^x \sin x$ 이므로

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\ &= 2e^x \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(0) + f''(0) &= e^0(\sin 0 + \cos 0) + 2e^0 \cos 0 \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

답 3

0429 $f'(x) = \sec^2 x$ 이므로

$$f'(a) + f'(-a) = \sec^2 a + \sec^2(-a) = 2 \sec^2 a$$

$$f'(a) + f'(-a) = 8 \text{이므로}$$

$$2 \sec^2 a = 8 \quad \therefore \sec^2 a = 4$$

또, $f''(x) = 2 \sec x \cdot \sec x \tan x = 2 \sec^2 x \tan x$ 이므로

$$\begin{aligned} &\{f''(a)\}^2 + \{f''(-a)\}^2 \\ &= (2 \sec^2 a \tan a)^2 + \{2 \sec^2(-a) \tan(-a)\}^2 \\ &= 4 \sec^4 a \tan^2 a + 4 \sec^4 a \tan^2 a \\ &= 8 \sec^4 a \tan^2 a \\ &= 8 \sec^4 a (\sec^2 a - 1) \\ &= 8 \cdot 4^2 \cdot (4 - 1) = 384 \end{aligned}$$

답 ①

0430 $g(x) = \{\ln(x-2)\}^2$ 에서

$$g'(x) = 2 \ln(x-2) \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-2} \ln(x-2)$$

$$\text{이므로 } g'(3) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g'(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g'(x) - g'(3)}{x-3} = g''(3)$$

이 때,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-2}{(x-2)^2} \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} \cdot \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{2 - 2 \ln(x-2)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } g''(3) = \frac{2 - 2 \cdot 0}{1} = 2$$

답 ④

0431 $\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}, \frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{x}{y}$$

$\frac{dy}{dx}$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{y-x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$t=0$ 일 때 $x=0, y=2$ 이므로 이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $t=0$ 에서의 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 의 값은

$$\frac{1}{2} - \frac{0}{2^3} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0432 $y' = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$
 $y'' = 2e^{2x}(2 \sin x + \cos x) + e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$
 $= e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x)$

이것을 $ay' - y'' = 5y$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} ae^{2x}(2 \sin x + \cos x) - e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x) &= 5e^{2x} \sin x \\ 2a \sin x + a \cos x - 3 \sin x - 4 \cos x &= 5 \sin x \\ (2a-8) \sin x + (a-4) \cos x &= 0 \end{aligned}$$

위의 식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a=4 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

0433 $f'(x) = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$
 $= e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$
 $f''(x) = 2e^{2x}(2 \cos x - \sin x) + e^{2x}(-2 \sin x - \cos x)$
 $= e^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x) \quad [50\% \text{ 배점}]$

이 때, $f''(x)=0$ 의 해가 $x=\alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} f''(\alpha) &= e^{2\alpha}(3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha) = 0 \\ e^{2\alpha} > 0 \text{이므로 } 3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로 위의 식의 양변을 $\cos \alpha$ 로 나누면

$$\begin{aligned} 3 - 4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 0, \quad 4 \tan \alpha = 3 \\ \therefore \tan \alpha &= \frac{3}{4} \end{aligned} \quad [50\% \text{ 배점}]$$

답 $\frac{3}{4}$

0434 $y^{(1)} = \frac{1}{x}, y^{(2)} = -\frac{1}{x^2}, y^{(3)} = \frac{2 \cdot 1}{x^3}, y^{(4)} = -\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{x^4}, \dots$

$$\therefore y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

따라서 $a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$ 이므로

$$a_{10} = -9! \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0435 $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$$= \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y'' = \sqrt{2} \left\{ e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} e^x \left\{ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$y''' = (\sqrt{2})^2 \left\{ e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= (\sqrt{2})^2 e^x \left\{ \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= (\sqrt{2})^3 e^x \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$\vdots$

$$\therefore y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0436 $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$

$f(x)$ 는 첫째항이 x , 공비가 x 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(1-x^n)}{1-x} = \frac{x - \boxed{x^{n+1}}}{1-x} \\ \therefore f'(x) &= \frac{\{1 - (n+1)x^n\}(1-x) - (x - x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + \boxed{nx^{n+1}}}{(1-x)^2} \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

0437 $f(x) = 1 + e^{-\ln x} + e^{-2 \ln x} + \dots + e^{-n \ln x} + \dots$

$$= 1 + x^{-\ln e} + x^{-2 \ln e} + \dots + x^{-n \ln e} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} \quad (\because x > 1)$$

이므로 $f'(x) = \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$

$$\therefore f'(3) = -\frac{1}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0438 $f_n(x) = (f \circ f_{n-1})(x) = f(f_{n-1}(x))$ 이므로

$$f'_n(x) = f'(f_{n-1}(x)) \cdot f'_{n-1}(x)$$

$$\therefore f'_5(x) = f'(f_4(x)) \cdot f'_4(x)$$

$$= f'(f_4(x)) \cdot f'(f_3(x)) \cdot f'_3(x)$$

$$= f'(f_4(x)) \cdot f'(f_3(x)) \cdot f'(f_2(x)) \cdot f'_2(x)$$

$$= f'(f_4(x)) \cdot f'(f_3(x)) \cdot f'(f_2(x))$$

$$\times f'(f_1(x)) \cdot f'_1(x)$$

또한,

$$f(1) = -1, f_2(1) = f(f(1)) = f(-1) = 1,$$

$$f_3(1) = f(f_2(1)) = f(1) = -1, \dots$$

이므로 자연수 k 에 대하여

$$f_n(1) = \begin{cases} -1 & (n=2k-1) \\ 1 & (n=2k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'_5(1) &= f'(f_4(1)) \cdot f'(f_3(1)) \cdot f'(f_2(1)) \\ &\quad \times f'(f_1(1)) \cdot f'_1(1) \\ &= f'(1) \cdot f'(-1) \cdot f'(1) \cdot f'(-1) \cdot f'(1) \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a = a^3 b^2 \end{aligned}$$

답 ③

0439 점 (a, b) 는 곡선 $xy=6$ 위의 점이므로

$$ab=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$xy=6$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$y + x \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

이 때, 곡선 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{b}{a}$ 이고, 직

선 $x+2y=0$ 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \quad \therefore b = \frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{a^2}{2} = 6 \quad \therefore a^2 = 12$$

따라서 곡선 위의 점 $(a^2, \frac{6}{a^2})$, 즉 $(12, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기

$$\text{는 } -\frac{\frac{1}{2}}{12} = -\frac{1}{24} \quad \text{답 ③}$$

0440 $f'(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x + 1$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

$$f'(\alpha) = \sqrt{2} + 1 \text{에서 } 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{6} \leq \alpha + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{12} \quad \text{답 ①}$$

0441 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta = \alpha$ 라 하면 α 는 곡선 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 $\tan \alpha$ 의 값은 곡선 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기와 같으므로 $y' = \cos x$ 에서

$$\tan \alpha = \cos 0 = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{답 ③}$$

0442 $(f \circ g)(0) = 2$ 에서

$$f(g(0)) = f(e^{\sin 0}) = f(e^0) = f(1) = 2$$

또, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이고, $g'(x) = e^{\sin x} \cos x$ 이므로 $(f \circ g)'(0) = 1$ 에서

$$f'(g(0))g'(0) = f'(1) = 1$$

$f(x)$ 를 이차식 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지는 일차 이하의 다항식이므로

$$f(x) = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있다.

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = a + b \quad \therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f'(1) = a \quad \therefore a = 1$

$a=1$ 을 ②에 대입하면 $b=1$ 이므로

$$R(x) = x + 1 \quad \therefore R(3) = 3 + 1 = 4 \quad \text{답 ④}$$

0443 점 C' 의 좌표를 (x, y) 라 하면 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} x &= 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= 2 + \sin \theta \end{aligned}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

이므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \overline{OC'}^2 = x^2 + y^2 = (2 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \\ &= 4 + 4 \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 5 + 4 \sin \theta \\ \therefore f'(\theta) &= 4 \cos \theta \end{aligned}$$

따라서 $y = 4 \cos \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 ⑤와 같다. **답 ⑤**

0444 $f(x) = \log x$ 에서 $f^{-1}(x) = 10^x$ 이므로

$$y = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(2^x) = 10^{2^x}$$

$$\therefore y' = 10^{2^x} \ln 10 \cdot 2^x \ln 2$$

따라서 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$10 \ln 10 \cdot 1 \cdot \ln 2 = 10 \ln 2 \ln 10 \quad \text{답 ④}$$

0445 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(5+h) - g(5)}{h} = g'(5)$

$g(5) = a$ 라 하면 $f(a) = 5$ 이므로

$$\ln(a-1) + a^2 + 1 = 5$$

$$\ln(a-1) = 4 - a^2$$

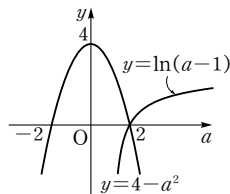
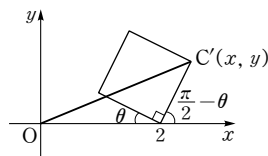
이 때, 오른쪽 그림에서 $a=2$

따라서 $g(5) = 2$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + 2x$$

이므로

$$g'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5} \quad \text{답 ②}$$



0446 $x = \ln(\sec y)$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sec y \tan y}{\sec y} = \tan y$$

$0 < y < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan y > 0$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\tan y} + \tan y \geq 2\sqrt{\frac{1}{\tan y} \cdot \tan y} = 2$$

이 때, 등호는 $\frac{1}{\tan y} = \tan y$ 일 때 성립하므로

$$\tan^2 y = 1, \quad \tan y = 1 \quad \therefore y = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $y = \frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dy}$ 는 최소값 2를 가지므로

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \beta = 2 \quad \therefore \beta \sec \alpha = 2 \sec \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \quad \text{답 ④}$$

0447 $\frac{x}{3-x} = e^{5(t-2)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

①의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln \frac{x}{3-x} = 5(t-2)$

$$\ln x - \ln(3-x) = 5(t-2)$$

양변을 t 에 대하여 미분하면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{-1}{3-x} \cdot \frac{dx}{dt} = 5$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} \right) \frac{dx}{dt} = 5, \quad \frac{3}{x(3-x)} \cdot \frac{dx}{dt} = 5$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{5}{3}x(3-x) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$t=2$ 를 ②에 대입하면 $\frac{x}{3-x} = 1$

$$x = 3-x \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ 을 ②에 대입하면 반응이 시작된 지 2초 후의 $\frac{dx}{dt}$ 의 값은

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(3 - \frac{3}{2} \right) = \frac{15}{4} \quad \text{답 ②}$$

0448 $\frac{dx}{dt} = 1 + 3t^2 + 5t^4 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}$

$$\frac{dy}{dt} = 2t + 4t^3 + 6t^5 + \dots + 2nt^{2n-1} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t + 4t^3 + 6t^5 + \dots + 2nt^{2n-1}}{1 + 3t^2 + 5t^4 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}}$$

$$= \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n} = \frac{n(n+1)}{n^2} \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \quad [30\% \text{ 배점}]$$

답 1

0449 $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ 이므로

$$f'(2n) = \frac{4n}{(2n)^2-1} \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(2n)}{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4n}{(2n)^2-1}}{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^2-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 1 \quad [60\% \text{ 배점}]$$

답 1

0450 $y = x^x$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = x \ln x \quad [20\% \text{ 배점}]$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\therefore y' = (\ln x + 1)x^x \quad [30\% \text{ 배점}]$$

위의 식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$y'' = \frac{1}{x} \cdot x^x + (\ln x + 1)(x^x)'$$

$$= x^{x-1} + (\ln x + 1)(\ln x + 1)x^x$$

$$= x^{x-1} + (\ln x + 1)^2 x^x \quad [50\% \text{ 배점}]$$

$$\text{답 } y'' = x^{x-1} + (\ln x + 1)^2 x^x$$

0451 $f^{(1)}(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

$$f^{(2)}(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$$

$$f^{(3)}(x) = e^x + (x+3)e^x = (x+4)e^x$$

$\vdots$

[40% 배점]

따라서 $f^{(n)}(x) = (x+n+1)e^x$ 이므로

$$f^{(n)}(0) = n+1 \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} f^{(n)}(0) = \sum_{n=1}^{10} (n+1)$$

$$= \frac{10 \cdot 11}{2} + 10 = 65 \quad [20\% \text{ 배점}]$$

답 65

III. 미분법

04 도함수의 활용(1)

0452 $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ 이므로 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{3}{2}(x-1) \quad \therefore y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad \cdots \text{답}$$

0453 $y' = \sec^2 x$ 이므로 $x = \frac{\pi}{4}$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$\sec^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1 \quad \cdots \text{답}$$

0454 $y' = e^x$ 이므로 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는 e 이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-e = e(x-1) \quad \therefore y = ex \quad \cdots \text{답}$$

0455 $y' = \frac{1}{x+2}$ 이므로 $x=0$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x-0) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \ln 2 \quad \cdots \text{답}$$

0456 $x^2 + y^2 = 25$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

따라서 점 $(3, -4)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - (-4) = \frac{3}{4}(x-3) \quad \therefore y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4} \quad \cdots \text{답}$$

0457 $y^2 = 8x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = 8 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}$$

따라서 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{4}{4} = 1$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-4 = 1 \cdot (x-2) \quad \therefore y = x+2 \quad \cdots \text{답}$$

0458 $16x^2 + 9y^2 = 25$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$32x + 18y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{9y}$$

따라서 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{16 \cdot (-1)}{9 \cdot 1} = \frac{16}{9}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{16}{9}\{x - (-1)\} \quad \therefore y = \frac{16}{9}x + \frac{25}{9} \quad \cdots \text{답}$$

0459 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{2}{9}x - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{9y}$$

따라서 점 $(3\sqrt{2}, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3\sqrt{2}}{9 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{\sqrt{2}}{3}(x-3\sqrt{2}) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{3}x - 1 \quad \cdots \text{답}$$

0460 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

점점의 좌표를 $(t, \frac{t-1}{t+1})$ 이라 하면 $f'(t) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{2}{(t+1)^2} = \frac{1}{2}, \quad (t+1)^2 = 4$$

$$t+1 = \pm 2 \quad \therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

따라서 점점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-0 = \frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \cdots \text{답}$$

0461 $f(x) = \sqrt{x}$ 로 놓으면 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

점점의 좌표를 $(t, \sqrt{t})$ 라 하면 $f'(t) = 1$ 이므로

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} = 1, \quad \sqrt{t} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \frac{1}{4}$$

따라서 점점의 좌표가 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) \quad \therefore y = x + \frac{1}{4} \quad \cdots \text{답}$$

0462 $f(x) = -\cos 2x$ 로 놓으면

$$f'(x) = -(-2 \sin 2x) = 2 \sin 2x$$

접점의 좌표를 $(t, -\cos 2t)$ 라 하면 $f'(t)=2$ 이므로

$$2\sin 2t=2, \quad \sin 2t=1$$

이 때, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq 2t \leq \pi$ 이므로

$$2t = \frac{\pi}{2} \quad \therefore t = \frac{\pi}{4}$$

따라서 접점의 좌표가 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore y=2x-\frac{\pi}{2} \quad \cdots \text{답}$$

0463 $f(x)=e^{3(x-1)}$ 으로 놓으면 $f'(x)=3e^{3(x-1)}$

접점의 좌표를 $(t, e^{3(t-1)})$ 이라 하면 $f'(t)=3$ 이므로

$$3e^{3(t-1)}=3, \quad e^{3(t-1)}=1$$

$$t-1=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표가 $(1, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2 \quad \cdots \text{답}$$

0464 $f(x)=\log x$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x \ln 10}$

접점의 좌표를 $(t, \log t)$ 라 하면 $f'(t)=\frac{1}{10 \ln 10}$ 이므로

$$\frac{1}{t \ln 10} = \frac{1}{10 \ln 10} \quad \therefore t=10$$

따라서 접점의 좌표가 $(10, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{10 \ln 10}(x-10)$$

$$\therefore y=\frac{1}{10 \ln 10}x-\frac{1}{\ln 10}+1 \quad \cdots \text{답}$$

0465 $f(x)=\frac{1}{x}$ 로 놓으면 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{1}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t) \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(2-t), \quad t=2-t \quad \therefore t=1$$

이것을 ㉠에 대입하면 $y-1=-(x-1)$

$$\therefore y=-x+2 \quad \cdots \text{답}$$

0466 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기

는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t) \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이 직선이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}} \cdot (-1-t)$$

$$2t-2=1+t \quad \therefore t=3$$

이것을 ㉠에 대입하면 $y-\sqrt{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (x-3)$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \cdots \text{답}$$

0467 $f(x)=2e^x$ 으로 놓으면 $f'(x)=2e^x$

접점의 좌표를 $(t, 2e^t)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2e^t=2e^t(x-t) \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-2e^t=2e^t \cdot (-t), \quad -2=-2t \quad \therefore t=1$$

이것을 ㉠에 대입하면 $y-2e=2e(x-1)$

$$\therefore y=2ex \quad \cdots \text{답}$$

0468 $f(x)=\ln x$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t) \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1-\ln t=\frac{1}{t} \cdot (-t), \quad \ln t=2 \quad \therefore t=e^2$$

이것을 ㉠에 대입하면 $y-2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$

$$\therefore y=\frac{1}{e^2}x+1 \quad \cdots \text{답}$$

0469 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$ 는 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고
개구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)$ 이므로 $f'(c)=0$ 인
 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=(x-b)+(x-a)=2x-a-b$ 이므로

$$f'(c)=2c-a-b=0$$

$$2c=a+b \quad \therefore c=\frac{a+b}{2}$$

$$\text{답 } \frac{a+b}{2}$$

0470 함수 $f(x)=x^2-8x$ 는 폐구간 $[0, 8]$ 에서 연속이고 개구간
 $(0, 8)$ 에서 미분가능하며 $f(0)=f(8)$ 이므로 $f'(c)=0$ 인 c 가 구
간 $(0, 8)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-8$ 이므로 $f'(c)=2c-8=0$

$$\therefore c=4$$

$$\text{답 } 4$$

0471 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$ 은 폐구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이고 개구간 $(-1, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)$ 이므로 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(-1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-2x-5$$

$$f'(c)=3c^2-2c-5=0, \quad (c+1)(3c-5)=0$$

$$\therefore c=\frac{5}{3} \quad (\because -1 < c < 3)$$

답 $\frac{5}{3}$

0472 함수 $f(x)=\sin x$ 는 폐구간 $[0, \pi]$ 에서 연속이고 개구간 $(0, \pi)$ 에서 미분가능하며 $f(0)=f(\pi)$ 이므로 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(0, \pi)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=\cos x \text{ 이므로 } f'(c)=\cos c=0$$

$$\therefore c=\frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < c < \pi)$$

답 $\frac{\pi}{2}$

0473 함수 $f(x)=x^3$ 은 폐구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 개구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ 인 c 가 구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2 \text{ 이므로 } \frac{27-0}{3-0}=3c^2$$

$$c^2=3 \quad \therefore c=\sqrt{3} \quad (\because 0 < c < 3)$$

답 $\sqrt{3}$

0474 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 은 폐구간 $[2, 10]$ 에서 연속이고 개구간 $(2, 10)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(10)-f(2)}{10-2}=f'(c)$ 인 c 가 구간 $(2, 10)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ 이므로 } \frac{3-1}{10-2}=\frac{1}{2\sqrt{c-1}}$$

$$\sqrt{c-1}=2, \quad c-1=4 \quad \therefore c=5$$

답 5

0475 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$ 은 폐구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 개구간

$(1, 3)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$ 인 c 가 구간

$(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \text{ 이므로 } \frac{\frac{1}{3}-1}{3-1}=-\frac{1}{c^2}$$

$$c^2=3 \quad \therefore c=\sqrt{3} \quad (\because 1 < c < 3)$$

답 $\sqrt{3}$

0476 함수 $f(x)=e^x$ 은 폐구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 개구간

$(0, 2)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$ 인 c 가 구간

$(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=e^x \text{ 이므로 } \frac{e^2-e^0}{2-0}=e^c$$

$$e^c=\frac{e^2-1}{2} \quad \therefore c=\ln \frac{e^2-1}{2}$$

답 $\ln \frac{e^2-1}{2}$

0477 함수 $f(x)=\ln x$ 는 폐구간 $[1, e]$ 에서 연속이고 개구간 $(1, e)$ 에서 미분가능하므로

$$\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=f'(c)$$

인 c 가 개구간 $(1, e)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=\frac{1}{x} \text{ 이므로 } \frac{1-0}{e-1}=\frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{e-1}=\frac{1}{c} \quad \therefore c=e-1$$

답 $e-1$

0478 $f(x)=e^x$ 으로 놓으면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

$x>0$ 이므로 폐구간 $[0, x]$ 에서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c) \quad (0 < c < x)$$

인 c 가 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=e^x \text{ 이므로}$$

$$\frac{e^x-1}{x}=e^c \quad \therefore c=\ln \frac{e^x-1}{x}$$

$$\text{이 때, } 0 < c < x \text{ 이므로 } 0 < \ln \frac{e^x-1}{x} < x$$

$x>0$ 이므로 각 변을 x 로 나누면

$$0 < \frac{1}{x} \ln \frac{e^x-1}{x} < 1 \quad \cdots \text{ 증명 끝}$$

0479 $f(x)=\ln x$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 $x>0$ 에서 연속이고 미분가능하므로 폐구간 $[x, x+1]$ 에서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(c) \quad (x < c < x+1)$$

인 c 가 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=\frac{1}{x} \text{ 이므로}$$

$$\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c}$$

..... ㉠

이 때, $x < c < x+1$ 이므로

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \quad (\because x > 0)$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln x < \frac{1}{x} \quad \cdots \text{ 증명 끝}$$

0480 구간 (a, b) 에 속하는 임의의 x 에 대하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c 가 구간 (a, x) 에 적어도 하나 존재한다.

이 때, $f'(c)=0$ 이므로 $f(x)-f(a)=0$

$$\therefore f(x)=f(a)$$

따라서 $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 상수함수이다. ... 증명 끝

0481 $F(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓으면 $F(x)$ 는 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 개구간 (a, b) 에서 미분가능하다. 또한, $f'(x)=g'(x)$ 이므로

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

$$\therefore F(x)=C \text{ (} C \text{는 상수)}$$

따라서 $f(x)-g(x)=C$ 이므로 $f(x)=g(x)+C$ 인 상수 C 가 존재한다. ... 증명 끝

$$\begin{aligned} \text{0482 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-4}{4x-3} \\ &= \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

답 -2

$$\begin{aligned} \text{0483 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{4} \\ &= \frac{\cos 0}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

$$\text{0484 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x-e}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{2x} = \frac{e}{2}$$

답 $\frac{e}{2}$

$$\text{0485 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{(x-1)\ln 10}}{1} = \frac{1}{\ln 10}$$

답 $\frac{1}{\ln 10}$

$$\text{0486 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0$$

답 0

$$\begin{aligned} \text{0487 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(x-1)^n} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(x-1)^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(x-1)^{n-2}} \\ &\quad \vdots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty \text{ (발산)} \end{aligned}$$

답 발산

$$\begin{aligned} \text{0488 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \ln 10}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln 10} = 0 \end{aligned}$$

답 0

$$\begin{aligned} \text{0489 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3} = \infty \text{ (발산)} \end{aligned}$$

답 발산

$$\begin{aligned} \text{0490 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \cdot (-\tan x) \\ &= 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

답 0

$$\begin{aligned} \text{0491 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

답 1

$$\text{0492 } y' = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$$

이므로 $x=-1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-2}{\sqrt{2-1}} = -2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-1=-2(x+1), \text{ 즉 } 2x+y+1=0$$

이므로 $a=2, b=1$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

$$\text{0493 } y' = e^x + xe^x$$

이므로 $x=0$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$e^0 + 0 \cdot e^0 = 1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y+1=1(x-0) \quad \therefore y=x-1$$

답 $y=x-1$

$$\text{0494 } f'(x) = \sqrt{3} \cos x - 3 \sin x$$

이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} - 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-3 = -\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right), \text{ 즉 } y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 3$$

이므로 접선의 y 절편은 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 3$ 이다.

답 ⑤

$$\text{0495 } y' = 4 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 3 - \ln x$$

이므로 $x=e$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $3 - \ln e = 2$

또한, $x=e$ 일 때 $y=4e-e \ln e=3e$

따라서 점 $(e, 3e)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-3e=2(x-e) \quad \therefore y=2x+e$$

답 ④

0496 $x^3+y^3-9xy=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9y-9x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-3y}{3x-y^2}$$

따라서 점 (2, 4)에서의 접선의 기울기는 $\frac{4}{5}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-4=\frac{4}{5}(x-2) \quad \therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}$$

$$x=0, y=a \text{를 대입하면} \quad a=\frac{12}{5}$$

답 ③

0497 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{x}{2}+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$$

따라서 점 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3}) \quad \therefore \sqrt{3}x+2y-4=0$$

따라서 $a=\sqrt{3}, b=2$ 이므로

$$a^2+b^2=3+4=7$$

답 ④

0498 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

따라서 점 (1, 9)에서의 접선의 기울기는 -3 이므로 접선의 방정식은

$$y-9=-3(x-1) \quad \therefore y=-3x+12$$

$y=0$ 을 대입하면 $0=-3x+12$

$$\therefore x=4$$

따라서 접선의 x 절편은 4이다.

답 ③

0499 $x^3+ye^x+y^2=2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+\frac{dy}{dx}e^x+ye^x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(e^x+2y)\frac{dy}{dx}=-3x^2-ye^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-ye^x}{e^x+2y}$$

따라서 점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-0)$$

$$\therefore x+3y-3=0$$

답 ③

0500 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 일 때 $x=1, y=\frac{3}{2}\pi+1$ 이므로 점점의 좌표는

$(1, \frac{3}{2}\pi+1)$ 이고,

$$\frac{dx}{d\theta}=\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\theta=\frac{3}{2}\pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-1}=-1$ 이므로 접선의 기울기는 -1 이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=-(x-1), \text{ 즉 } y=-x+\frac{3}{2}\pi+2$$

이므로 접선의 y 절편은 $\frac{3}{2}\pi+2$ 이다.

답 ⑤

0501 $t=1$ 일 때 $x=2, y=0$ 이므로 점점의 좌표는 (2, 0)이고,

$$\frac{dx}{dt}=2t-\frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt}=3t^2+\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+\frac{1}{t^2}}{2t-\frac{1}{t^2}}=\frac{3t^4+1}{2t^3-1}$$

따라서 $t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 4이므로 접선의 방정식은

$$y-0=4(x-2)$$

$$\therefore y=4x-8$$

답 ①

0502 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}, y=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로 점점의 좌표는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

[20% 배점]

$$\frac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta(-\sin\theta)=-3\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\sin\theta\cos^2\theta}=-\tan\theta \quad [30\% \text{ 배점}]$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 -1 이므로

접선의 방정식은

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4})$$

$$\therefore y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

[30% 배점]

$$y=0\text{을 대입하면} \quad 0=-x+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 접선의 x 절편은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

[20% 배점]

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0503 $f(x)=\sin 2x$ 로 놓으면 $f'(x)=2\cos 2x$

직선 $x-2y+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2

이므로 접점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$ 라 하면

$$2\cos 2t=-2, \quad \cos 2t=-1$$

$$0\leq t\leq \pi\text{에서 } 0\leq 2t\leq 2\pi\text{이므로} \quad 2t=\pi \quad \therefore t=\frac{\pi}{2}$$

따라서 접점의 좌표가 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore y=-2x+\pi$$

답 ①

0504 $f(x)=\ln x$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 $f'(t)=2$ 이므로

$$\frac{1}{t}=2 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

즉, 접점의 좌표가 $(\frac{1}{2}, -\ln 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+\ln 2=2\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=2x-\ln 2-1$$

따라서 이 직선의 y 절편은 $-\ln 2-1$ 이다.

답 ①

0505 곡선 $f(x)$ 와 x 축과의 교점의 좌표를 $(t, 0)$ 이라 하면

$$f(t)=e^{2t}+at=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, $f'(x)=2e^{2x}+a$ 이고, $(t, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 0이므로

$$f'(t)=2e^{2t}+a=0$$

$$\therefore a=-2e^{2t}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $e^{2t}-2e^{2t}\cdot t=0$

$$e^{2t}(1-2t)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=-2e^{2\cdot\frac{1}{2}}=-2e$$

답 $-2e$

0506 $f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

접선의 기울기가 $\tan 45^\circ=1$ 이므로 접점의 좌표를

$(t, \sin t+\cos t)$ 라 하면

$$f'(t)=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)=1, \quad \sin\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이 때, $0< t < 2\pi$ 에서 $\frac{3}{4}\pi < t + \frac{3}{4}\pi < \frac{11}{4}\pi$ 이므로

$$t+\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{4}\pi \quad \therefore t=\frac{3}{2}\pi$$

따라서 접점의 좌표가 $(\frac{3}{2}\pi, -1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1)=1\cdot\left(x-\frac{3}{2}\pi\right) \quad \therefore y=x-\frac{3}{2}\pi-1$$

$$y=0\text{을 대입하면} \quad 0=x-\frac{3}{2}\pi-1$$

$$\therefore x=\frac{3}{2}\pi+1$$

따라서 접선의 x 절편은 $\frac{3}{2}\pi+1$ 이다.

답 ⑤

0507 $f(x)=\sin x$ 로 놓으면 $f'(x)=\cos x$

이므로 점 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

점 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기

가 -2 이므로 그 방정식은

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \quad \therefore y=-2x+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 y 절편은 $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

답 $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$

0508 $f(x)=x^2e^{3x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x\cdot e^{3x}+x^2\cdot 3e^{3x}=xe^{3x}(3x+2)$$

이므로 점 $(-1, \frac{1}{e^3})$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=-1\cdot\frac{1}{e^3}\cdot(-1)=\frac{1}{e^3}$$

따라서 점 $(-1, \frac{1}{e^3})$ 을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선

의 방정식은

$$y-\frac{1}{e^3}=-e^3(x+1) \quad \therefore y=-e^3x-e^3+\frac{1}{e^3}$$

따라서 y 절편은 $\frac{1}{e^3}-e^3$ 이다.

답 ①

0509 $f(x)=\cos 5x$ 로 놓으면 $f'(x)=-5\sin 5x$

이므로 점 $(t, \cos 5t)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-5\sin 5t$$

따라서 점 $(t, \cos 5t)$ 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선

의 방정식은

$$y-\cos 5t=\frac{1}{5\sin 5t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{5\sin 5t}x-\frac{t}{5\sin 5t}+\cos 5t$$

따라서 $g(t) = \cos 5t - \frac{t}{5 \sin 5t}$ 이므로

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{5}{2}\pi - \frac{\frac{\pi}{2}}{5 \sin \frac{5}{2}\pi} = -\frac{\frac{\pi}{2}}{5} = -\frac{\pi}{10} \quad \text{답 ②}$$

0510 $f(x) = e^{-x+a}$ 으로 놓으면 $f'(x) = -e^{-x+a}$

접점의 좌표를 (t, e^{-t+a}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -e^{-t+a}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{-t+a} = -e^{-t+a}(x-t) \quad \dots\dots ㉠$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-e^{-t+a} = -e^{-t+a} \cdot (-t) \quad \therefore t = -1$$

$t = -1$ 을 ㉠에 대입하면

$$y - e^{1+a} = -e^{1+a}(x+1)$$

이 직선이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$-1 - e^{1+a} = -e^{1+a}(1+1)$$

$$e^{1+a} = 1, \quad 1+a=0$$

$$\therefore a = -1$$

답 ②

0511 $f(x) = x \ln x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

접점의 좌표를 $(t, t \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = \ln t + 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - t \ln t = (\ln t + 1)(x-t) \quad \dots\dots ㉠$$

이 직선이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 - t \ln t = (\ln t + 1) \cdot (-t), \quad -1 = -t \quad \therefore t = 1$$

$t = 1$ 을 ㉠에 대입하면 $y = x - 1$

따라서 구하는 접선의 x 절편은 1이다.

답 ④

0512 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{e^t}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기

는 $f'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{e^t}{t} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}(x-t) \quad \dots\dots ㉠ \quad [40\% \text{ 배점}]$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\frac{e^t}{t} = \frac{e^t(t-1)}{t^2} \cdot (-t)$$

$$1 = t-1 \quad \therefore t = 2 \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$t = 2$ 를 ㉠에 대입하면

$$y - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4}(x-2) \quad \therefore y = \frac{e^2}{4}x \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\text{답 } y = \frac{e^2}{4}x$$

0513 $f(x) = xe^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

접점의 좌표를 (t, te^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (t+1)e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - te^t = (t+1)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$-te^t = (t+1)e^t(1-t), \quad -t = (t+1)(1-t)$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

이 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

이고, 접선의 기울기는 각각 $(\alpha+1)e^\alpha, (\beta+1)e^\beta$ 이므로

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= (\alpha+1)e^\alpha \cdot (\beta+1)e^\beta \\ &= (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)e^{\alpha+\beta} \\ &= (-1+1+1)e^1 = e \end{aligned}$$

답 ④

0514 직선 $y = ax$ 는 a 의 값에 관계없이 원점을 지나므로 a 의 값은 원점에서 곡선 $y = \frac{\ln x}{x}$ 에 그은 접선의 기울기와 같다.

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{\ln t}{t})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2} \cdot (-t), \quad \ln t = 1 - \ln t$$

$$\ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

$$\therefore a = f'(\sqrt{e}) = \frac{1 - \ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$

답 ①

0515 $f(x) = xe^{x-1}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$$

접점의 좌표를 (t, te^{t-1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (t+1)e^{t-1}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - te^{t-1} = (t+1)e^{t-1}(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-te^{t-1} = (t+1)e^{t-1}(a-t)$$

$$-t = (t+1)(a-t)$$

$$\therefore t^2 - at - a = 0$$

$\dots\dots ㉠$

점 $(a, 0)$ 에서 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D=a^2+4a>0, \quad a(a+4)>0$$

$$\therefore a<-4 \text{ 또는 } a>0$$

답 $a<-4$ 또는 $a>0$

0516 $f(x)=(x+a)e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x}-(x+a)e^{-x}=(1-x-a)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, (t+a)e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1-t-a)e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t+a)e^{-t}=(1-t-a)e^{-t} \cdot (x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t+a)e^{-t}=(1-t-a)e^{-t} \cdot (-t)$$

$$-(t+a)=-t+t^2+at$$

$$\therefore t^2+at+a=0$$

..... ㉠

원점에서 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로

$$D=a^2-4a=0, \quad a(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a \neq 0)$$

답 ⑤

0517 $f(x)=\frac{x-1}{x}$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $(t, \frac{t-1}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{1}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-\frac{t-1}{t}=\frac{1}{t^2}(x-t)$$

..... ㉠

이 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$2-\frac{t-1}{t}=\frac{1}{t^2}(3-t), \quad 2t^2-t(t-1)=3-t$$

$$t^2+2t-3=0, \quad (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

이 때, $t=-3, t=1$ 은 모두 ㉠의 분모를 0으로 하지 않으므로 점 $(3, 2)$ 에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

답 2

0518 $f(x)=a+\cos x, g(x)=\sin^2 x$ 로 놓으면

$$f'(x)=-\sin x, g'(x)=2 \sin x \cos x$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서} \quad a+\cos t=\sin^2 t$$

$$\therefore a=\sin^2 t-\cos t=1-\cos^2 t-\cos t$$

..... ㉠

$$f'(t)=g'(t) \text{에서} \quad -\sin t=2 \sin t \cos t$$

$$\sin t(1+2 \cos t)=0 \quad \therefore \cos t=-\frac{1}{2} \quad (\because 0<t<\pi)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$a=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

답 ⑤

0519 $f(x)=ax^2, g(x)=\ln x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2ax, g'(x)=\frac{1}{x}$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서} \quad at^2=\ln t$$

..... ㉠

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$2at=\frac{1}{t} \quad \therefore at^2=\frac{1}{2}$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}=\ln t \quad \therefore t=\sqrt{e}$$

$$\text{이것을 ㉡에 대입하면} \quad ae=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{1}{2e}$$

답 ①

0520 $f(x)=\ln x, g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$$

두 곡선이 점 $(e^3, 3)$ 에서 접하므로

$$f(e^3)=g(e^3) \text{에서} \quad 3=ae^3+\frac{b}{e^3}$$

$$\therefore 3e^3=ae^6+b$$

..... ㉠

$$f'(e^3)=g'(e^3) \text{에서} \quad \frac{1}{e^3}=a-\frac{b}{e^6}$$

$$\therefore e^3=ae^6-b$$

..... ㉡

$$\text{㉠}+\text{㉡} \text{을 하면} \quad 4e^3=2ae^6 \quad \therefore a=\frac{2}{e^3}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$3e^3=\frac{2}{e^3} \cdot e^6+b \quad \therefore b=e^3$$

$$\therefore ab=\frac{2}{e^3} \cdot e^3=2$$

답 ③

0521 $f(x)=a+\sin x, g(x)=\sin^2 x$ 로 놓으면

$$f'(x)=\cos x, g'(x)=2 \sin x \cos x$$

두 곡선의 교점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$ 에서

$$a+\sin t=\sin^2 t$$

$$\therefore a=\sin^2 t-\sin t$$

..... ㉠

[20% 배점]

교점에서 공통인 접선을 갖기 위해서는 $f'(t)=g'(t)$ 이어야 하므로

$$\cos t=2 \sin t \cos t, \quad \cos t(2 \sin t-1)=0$$

$$\therefore \cos t=0 \text{ 또는 } \sin t=\frac{1}{2}$$

[20% 배점]

(i) $\cos t=0$ 일 때

$\sin t=\pm 1$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$a=0 \text{ 또는 } a=2$$

(ii) $\sin t = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\sin t = \frac{1}{2} \text{을 ㉠에 대입하면} \quad a = -\frac{1}{4}$$

따라서 a 의 값의 합은

$$0 + 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

[60% 배점]

답 $\frac{7}{4}$

0522 $g(4)=k$ 로 놓으면 $f(k)=4$ 이므로

$$k^3 - k^2 = 4, \quad k^3 - k^2 - 4 = 0$$

$$(k-2)(k^2+k+2)=0 \quad \therefore k=2 \quad (\because k^2+k+2>0)$$

$$\therefore g'(4) = \frac{1}{f'(2)}$$

이 때, $f'(x) = 3x^2 - 2x$ 이므로

$$f'(2) = 8 \quad \therefore g'(4) = \frac{1}{8}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-2 = \frac{1}{8}(x-4), \quad \text{즉 } y = \frac{1}{8}x + \frac{3}{2}$$

이므로 접선의 y 절편은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 ③

0523 $g(1)=k$ 로 놓으면 $f(k)=1$ 이므로

$$e^{2k-1}=1, \quad 2k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}$$

이 때, $f'(x) = 2e^{2x-1}$ 이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \therefore g'(1) = \frac{1}{2}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x$$

답 ②

0524 함수 $f(x) = \sin x + \cos x$ 는 폐구간 $[0, 2\pi]$ 에서 연속이고 개구간 $(0, 2\pi)$ 에서 미분가능하며

$$f(0) = f(2\pi) = 1$$

이므로 $f'(c) = 0$ 인 c 가 구간 $(0, 2\pi)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = \cos x - \sin x \text{이므로}$$

$$f'(c) = \cos c - \sin c = 0 \quad \therefore \sin c = \cos c$$

이 때, $0 < c < 2\pi$ 이므로

$$c = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } c = \frac{5}{4}\pi$$

따라서 모든 상수 c 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

답 ②

0525 함수 $f(x) = 4x - x^2$ 은 폐구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 개구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하며

$$f(1) = f(3) = 3$$

이므로 $f'(c)$ 인 c 가 구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = 4 - 2x \text{이므로}$$

$$f'(c) = 4 - 2c = 0$$

$$\therefore c = 2$$

답 2

0526 함수 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 은 폐구간 $[-e, e]$ 에서 연속이고 개구간 $(-e, e)$ 에서 미분가능하며

$$f(-e) = f(e) = \frac{e^e + e^{-e}}{2}$$

이므로 $f'(c) = 0$ 인 c 가 구간 $(-e, e)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{이므로} \quad f'(c) = \frac{e^c - e^{-c}}{2} = 0$$

$$e^c - e^{-c} = 0, \quad e^c = e^{-c}$$

$$\therefore c = 0$$

답 0

0527 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}f'(c)$ 에서

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} = f'(c) \quad \therefore \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = f'(c)$$

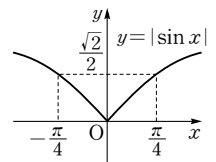
이 때, 보기의 세 함수는 모두 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 를 만족하므로

$f'(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에 존재하는지 알아본다.

ㄱ. 함수 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f'(c) = 0$ 을 만족

하는 c 가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에 존재하

지 않는다.



ㄴ. 함수 $f(x) = |\cos x|$ 는 폐구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 에서 연속이고 개

구간 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에서 미분가능하며 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 이므로 롤

의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

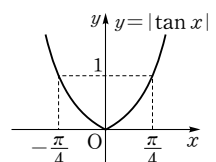
에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 함수 $y = |\tan x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f'(c) = 0$ 을 만족하

는 c 가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에 존재하지

않는다.

이상에서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ㄴ 뿐이다.



답 ②

0528 함수 $f(x) = \ln 2x$ 는 폐구간 $\left[\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right]$ 에서 연속이고 구간 $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$ 에서 미분가능하므로

$$\frac{f\left(\frac{e}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{e}{2} - \frac{1}{2}} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \text{이므로} \quad \frac{1-0}{\frac{e}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{2}{e-1} = \frac{1}{c} \quad \therefore c = \frac{e-1}{2}$$

답 ①

0529 함수 $f(x) = x^3 - 2x$ 는 폐구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고 개구간 $(1, 2)$ 에서 미분가능하므로

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \text{이므로} \quad 4 - (-1) = 3c^2 - 2$$

$$3c^2 = 7 \quad \therefore c = \frac{\sqrt{21}}{3} \quad (\because 1 < c < 2)$$

답 $\frac{\sqrt{21}}{3}$

0530 함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 개구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} \text{이므로}$$

$$\frac{(e - e^{-1}) - (e^{-1} - e)}{1 - (-1)} = e^c + e^{-c}$$

$$e - e^{-1} = e^c + e^{-c} \quad \therefore e^{2c} - (e - e^{-1})e^c + 1 = 0$$

$e^c = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - (e - e^{-1})t + 1 = 0$$

이 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = 1$$

이 때, $c = \ln \alpha$ 또는 $c = \ln \beta$ 이므로 모든 상수 c 의 값의 합은

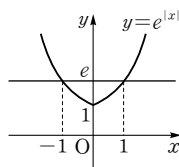
$$\ln \alpha + \ln \beta = \ln \alpha\beta = 0$$

답 ③

0531 $\frac{f(1) - f(-1)}{2} = f'(c)$ 에서

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

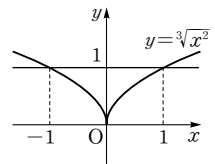
ㄱ. 함수 $y = e^{|x|}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ①을 만족하는 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 존재하지 않는다.



ㄴ. 함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$ 는 폐구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 개구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 ①을 만족하는 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 함수 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ①을 만족하는 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 존재하지 않는다.

이상에서 조건을 만족하는 함수는 ㄴ뿐이다.



답 ②

0532 $f(x) = \ln x$ 로 놓으면 함수 $f(x)$ 는 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 개구간 (a, b) 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{이므로} \quad \frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c} \quad \therefore k = \frac{1}{c}$$

이 때, a, b ($a < b$)는 구간 $[1, 10]$ 에 속하는 임의의 실수이므로

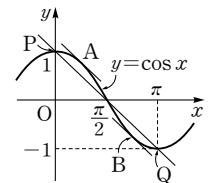
$$1 < c < 10, \quad \frac{1}{10} < \frac{1}{c} < 1$$

$$\therefore \frac{1}{10} < k < 1$$

답 $\frac{1}{10} < k < 1$

0533 폐구간 $[0, \pi]$ 에서 평균값의 정리를 만족하는 상수 c 는 두 점 $P(0, 1)$, $Q(\pi, -1)$ 을 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x 좌표이다.

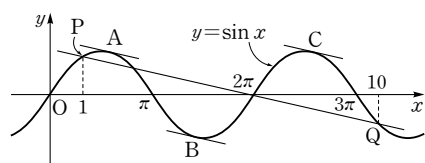
함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 P, Q 를 잇는 직선과 평행한 접선을 두 점 A, B 에서 각각 그을 수 있다. 따라서 상수 c 의 개수는 2이다.



답 ②

0534 폐구간 $[1, 10]$ 에서 평균값의 정리를 만족하는 상수 c 는 두 점 $P(1, \sin 1)$, $Q(10, \sin 10)$ 을 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x 좌표이다.

함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 점 P, Q 를 잇는 직선과 평행한 접선을 세 점 A, B, C 에서 각각 그을 수 있다.



따라서 상수 c 의 개수는 3이다.

답 3

0535 $x > 0$ 일 때 $\cos x < 3^x$ 이므로 $f(x) = \sin x$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 폐구간 $[\cos x, 3^x]$ 에서 연속이고 개구간 $(\cos x, 3^x)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(3^x) - f(\cos x)}{3^x - \cos x} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $(\cos x, 3^x)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = \cos x \text{이므로} \quad \frac{\sin(3^x) - \sin(\cos x)}{3^x - \cos x} = \cos c$$

이 때, $\cos x < c < 3^x$ 에서 $x \rightarrow +0$ 이면 $c \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(3^x) - \sin(\cos x)}{3^x - \cos x} = \lim_{c \rightarrow 1} \cos c = \cos 1$$

다른 풀이 로피탈의 정리를 이용하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(3^x) - \sin(\cos x)}{3^x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos(3^x) \cdot 3^x \ln 3 - \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)}{3^x \ln 3 + \sin x} \\ &= \frac{\cos 1 \cdot \ln 3}{\ln 3} = \cos 1 \end{aligned}$$

0536 $x > 0$ 일 때 $\sin x < x$ 이므로 $f(x) = \sin x$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 폐구간 $[\sin x, x]$ 에서 연속이고 개구간 $(\sin x, x)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $(\sin x, x)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = \cos x \text{이므로} \quad \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = \cos c$$

이 때, $\sin x < c < x$ 에서 $x \rightarrow +0$ 이면 $c \rightarrow +0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = \lim_{c \rightarrow +0} \cos c = 1$$

0537 (i) $x > 0$ 일 때

$\sin x < x$ 이므로 $f(x) = e^x$ 으로 놓으면 $f(x)$ 는 폐구간 $[\sin x, x]$ 에서 연속이고 개구간 $(\sin x, x)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $(\sin x, x)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = e^x \text{이므로} \quad \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^c$$

이 때, $\sin x < c < x$ 에서 $x \rightarrow +0$ 이면 $c \rightarrow +0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{c \rightarrow +0} e^c = 1$$

(ii) $x < 0$ 일 때

같은 방법으로 구간 $[x, \sin x]$ 에서 평균값의 정리에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{c \rightarrow -0} e^c = 1$$

(i), (ii)에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1$$

답 ②

0538 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$ 는 폐구간 $\left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$ 에서 연속이고 개구간 $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ 에서 미분가능하다.

따라서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이 때, $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left[f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) = e \end{aligned}$$

답 ④

0539 $f(x) = \sqrt{x}$ 에서 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ 에서

$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a} + h \cdot \frac{1}{2\sqrt{a+\theta h}}$$

$$2\sqrt{a+\theta h} = \frac{h}{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{a+\theta h} = \frac{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{(a+h) - a}$$

$$2\sqrt{a+\theta h} = \sqrt{a+h} + \sqrt{a}$$

양변을 제곱하면

$$4(a+\theta h) = a+h+2\sqrt{a(a+h)}+a$$

$$4\theta h = h-2a+2\sqrt{a^2+ah}$$

$$\therefore \theta = \frac{h-2(a-\sqrt{a^2+ah})}{4h}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-2(a-\sqrt{a^2+ah})}{4h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{4h} - \frac{a-\sqrt{a^2+ah}}{2h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{a^2 - (a^2+ah)}{2h(a+\sqrt{a^2+ah})} \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{a}{2(a+\sqrt{a^2+ah})} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

답 ④

0540 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에서 $f'(x) = 2x + a$
 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ 에서
 $(x+h)^2 + a(x+h) + b = x^2 + ax + b + h\{2(x+\theta h) + a\}$
 $h = 2\theta h \quad \therefore \theta = \frac{1}{2} \quad (\because h > 0)$ **답 ③**

0541 $f(x) = \frac{1}{x}$ 에서 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
 $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ 에서
 $\frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} - h \cdot \frac{1}{(a+\theta h)^2}$
 $a(a+\theta h)^2 = (a+h)(a+\theta h)^2 - ha(a+h)$
 $h(a+\theta h)^2 - ha(a+h) = 0$
 $h^3\theta^2 + 2ah^2\theta - ah^2 = 0$
 $h\theta^2 + 2a\theta - a = 0$
근의 공식에 의하여 $\theta = \frac{-a + \sqrt{a^2 + ha}}{h} \quad (\because \theta > 0)$
 $\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + ha} - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^2 + ha) - a^2}{h(\sqrt{a^2 + ha} + a)}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a^2 + ha} + a}$
 $= \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}$ **답 $\frac{1}{2}$**

0542 $y = e^{x-1} - e$ 에 $y=0$ 을 대입하면
 $0 = e^{x-1} - e, \quad e^{x-1} = e$
 $x-1=1 \quad \therefore x=2$
 $y = e^{x-1} - e$ 에 $x=0$ 을 대입하면
 $y = e^{-1} - e = \frac{1}{e} - e$
따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축이 만나는 점이 각각
 $(2, 0), \left(0, \frac{1}{e} - e\right)$ 이므로 직선 l 의 기울기는
 $\frac{0 - \left(\frac{1}{e} - e\right)}{2 - 0} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$
직선 l 에 평행한 접선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $f'(x) = e^{x-1}$ 이므로
 $f'(t) = e^{t-1} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$
 $e^t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$
 $\therefore t = \ln \frac{e^2 - 1}{2}$ **답 ④**

0543 $g(x) = \cos 3x$ 로 놓으면 $g'(x) = -3 \sin 3x$
이므로 점 $P(t, \cos 3t)$ 에서의 접선의 기울기는
 $g'(t) = -3 \sin 3t$

따라서 점 P 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가
 $\frac{1}{3 \sin 3t}$ 이므로 그 방정식은
 $y - \cos 3t = \frac{1}{3 \sin 3t}(x - t)$
 $\therefore y = \frac{1}{3 \sin 3t}x - \frac{t}{3 \sin 3t} + \cos 3t$
따라서 $f(t) = -\frac{t}{3 \sin 3t} + \cos 3t$ 이므로
 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{3 \sin 3t} + \cos 3t\right)$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{9} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} + \cos 3t\right)$
 $= -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}$ **답 $\frac{8}{9}$**

0544 $f(x) = e^{ax} + ae^{-ax}$ 으로 놓으면
 $f'(x) = ae^{ax} - a^2e^{-ax}$
이므로 점 $(0, 1+a)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(0) = a - a^2$
따라서 점 $(0, 1+a)$ 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선
의 방정식은
 $y - (1+a) = \frac{1}{a^2 - a}(x - 0) \quad \therefore y = \frac{1}{a(a-1)}x + a + 1$
 $y=0$ 을 대입하면 $0 = \frac{1}{a(a-1)}x + a + 1$
 $\frac{1}{a(a-1)}x = -(a+1)$
 $\therefore x = -a(a-1)(a+1) = -a^3 + a$
따라서 $g(a) = -a^3 + a$ 이므로
 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{g(a)}{a^3 + 1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a^3 + a}{a^3 + 1} = -1$ **답 ②**

0545 $y' = 2e^{2x} - 2e^x$ 이므로 $e^x = t \quad (t > 0)$ 라 하면
 $y' = 2t^2 - 2t = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$
따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 y' 의 최소값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.
 $e^x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \ln \frac{1}{2}$ 이므로 $y = e^{2x} - 2e^x + 4$ 에 대입하면
 $y = \frac{1}{4} - 1 + 4 = \frac{13}{4}$
따라서 점 $\left(\ln \frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - \frac{13}{4} = -\frac{1}{2}\left(x - \ln \frac{1}{2}\right)$
 $y=0$ 을 대입하면 $-\frac{13}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$
 $\therefore x = \frac{13}{2} - \ln 2$ **답 ①**

0546 $xy=2$ 에서 $y=\frac{2}{x}$ 이므로 $y'=-\frac{2}{x^2}$

따라서 점 $A_n(x_n, y_n)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2}{x_n^2}$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y-y_n=-\frac{2}{x_n^2}(x-x_n)$$

$y=0$ 을 대입하면 $-y_n=-\frac{2}{x_n^2}(x-x_n)$

$$y_n x_n^2 = 2x - 2x_n$$

$$2x_n = 2x - 2x_n \quad (\because x_n y_n = 2)$$

$$x = 2x_n \quad \therefore x_{n+1} = 2x_n$$

점 $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ 이 곡선 $y=\frac{2}{x}$ 위의 점이므로

$$y_{n+1} = \frac{2}{x_{n+1}} = \frac{2}{2x_n} = \frac{1}{2}y_n \quad (\because x_n = \frac{2}{y_n})$$

따라서 수열 $\{y_n\}$ 은 첫째항이 2이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

답 4

0547 $y=\frac{4}{x}$ 에서 $y'=-\frac{4}{x^2}$

점 P의 좌표를 $(t, \frac{4}{t})$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$-\frac{4}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{4}{t}=-\frac{4}{t^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}$$

..... ㉠

㉠에 $y=0$ 을 대입하면 $0=-\frac{4}{t^2}x+\frac{8}{t}$

$$x=2t \quad \therefore A(2t, 0)$$

㉠에 $x=0$ 을 대입하면

$$y=\frac{8}{t} \quad \therefore B(0, \frac{8}{t})$$

$$\therefore \overline{AB}^2 = (0-2t)^2 + \left(\frac{8}{t}-0\right)^2 = 4t^2 + \frac{64}{t^2}$$

이 때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4t^2 + \frac{64}{t^2} \geq 2\sqrt{4t^2 \cdot \frac{64}{t^2}} = 32$$

(단, 등호는 $4t^2 = \frac{64}{t^2}$ 일 때 성립)

따라서 선분 AB의 길이의 최소값은

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

답 ②

0548 직선 $y=mx$ 를 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 45° 회전시켜 얻은 직선의 방정식을 $y=m'x$ 라 하자.

직선 $y=mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\tan \theta = m$ 이므로

$$m' = \tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{m+1}{1-m}$$

따라서 직선 $y=mx$ 를 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 45° 회전시킨 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 직선의 방정식은

$$y = \frac{m+1}{1-m}x + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

한편, $y=\ln x$ 에서 $y'=\frac{1}{x}$ 이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t, \ln t)$

에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$ 이다.

따라서 점 $(t, \ln t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x-t) \quad \therefore y = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 서로 같은 직선이므로 y 절편에서

$$1 = -1 + \ln t \quad \therefore t = e^2$$

또, 기울기에서 $\frac{m+1}{1-m} = \frac{1}{t}$ 이므로

$$\frac{m+1}{1-m} = \frac{1}{e^2}, \quad 1-m = (m+1)e^2$$

$$(1+e^2)m = 1-e^2 \quad \therefore m = \frac{1-e^2}{1+e^2}$$

답 ④

0549 $y=e^x$ 에서 $y'=e^x$

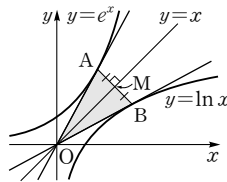
점 A의 좌표를 (t, e^t) 이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기는 e^t 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^t = e^t(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-e^t = e^t \cdot (-t) \quad \therefore t=1 \quad \therefore A(1, e)$$

두 함수 $y=e^x$, $y=\ln x$ 는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림과 같이 그 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 원점에서 두 곡선에 그은 각각의 접선 또한 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



$$\therefore B(e, 1)$$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $M(\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2})$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{OM}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(e-1)^2 + (1-e)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{e+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{e+1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(e-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{(e+1)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} (e-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (e+1)$$

$$= \frac{e^2-1}{2}$$

답 ④

0550 $y = \sqrt{x}$ 에서 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

점 P의 좌표를 $(t, \sqrt{t})$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에 $x=2$ 를 대입하면

$$y = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 2 + \frac{\sqrt{t}}{2} = \frac{2+t}{2\sqrt{t}}$$

①에 $x=6$ 을 대입하면

$$y = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 6 + \frac{\sqrt{t}}{2} = \frac{6+t}{2\sqrt{t}}$$

이므로 사다리꼴의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2+t}{2\sqrt{t}} + \frac{6+t}{2\sqrt{t}} \right) \cdot (6-2) &= 2 \cdot \frac{4+t}{\sqrt{t}} \\ &= 2 \left(\frac{4}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \end{aligned}$$

이 때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \geq 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t}} = 4$$

(단, 등호는 $\frac{4}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}$ 일 때 성립)

따라서 사다리꼴의 넓이의 최소값은

$$2 \cdot 4 = 8$$

답 8

0551 $ax^2 = \sin 2x$ 에서 $ax^2 - \sin 2x = 0$

$g(x) = ax^2 - \sin 2x$ 로 놓으면

$$g'(x) = 2ax - 2\cos 2x = 2(ax - \cos 2x)$$

이므로 $a \neq 0$ 일 때 방정식 $g(x) = 0$ 은 m 개의 실근을 갖고,

$g'(x) = 0$ 은 n 개의 실근을 가진다.

방정식 $g(x) = 0$ 의 실근을

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (a_1 < a_2 < \dots < a_m)$$

이라 하면 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 롤의 정리에 의하여 a_1 과 a_2 사이, a_2 와 a_3 사이, $\dots$, a_{m-1} 과 a_m 사이에 각각 $g'(x) = 0$ 의 근이 적어도 하나씩 존재한다. 따라서 $n \geq m-1$ 이므로

$$m - n \leq 1$$

즉, $m-n$ 의 최대값은 1이다.

답 ④

0552 함수 $f(x) = \frac{1-2x}{x-1}$ 는 $x \neq 1$ 인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $2 \leq x_1 < x_2 \leq 5$ 일 때 $f(x)$ 는 폐구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고 개구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하다.

따라서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

인 c 가 구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x-1) - (1-2x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

이므로

$$a = \frac{1}{(c-1)^2}$$

이 때, $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 는 폐구간 $[2, 5]$ 에 속하는 임의의 실수이므로

$$2 < c < 5$$

$$1 < c-1 < 4, \quad 1 < (c-1)^2 < 16$$

$$\therefore \frac{1}{16} < \frac{1}{(c-1)^2} < 1$$

따라서 $\frac{1}{16} < a < 1$ 이므로 옳은 것은 ②이다.

답 ②

0553 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(a_n) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{a_n - \frac{1}{3}} = \frac{f(a_n) - \frac{1}{3}}{a_n - \frac{1}{3}} = f'(c)$$

인 c 가 구간 $\left(\frac{1}{3}, a_n\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = \frac{3}{2} - 3x \text{는 감소함수이므로 } \frac{1}{3} < c < a_n \text{에서}$$

$$f'(c) < f'\left(\frac{1}{3}\right) \quad \therefore f'(c) < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1} - \frac{1}{3}}{a_n - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2} \quad (n \geq 1)$$

답 ②

0554 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값 e 를 가지므로

$$f(1) = e, \quad f'(1) = 0$$

[30% 배점]

$g(x) = f(x)e^{-x}$ 으로 놓으면

$$g(1) = f(1)e^{-1} = e \cdot e^{-1} = 1$$

또, $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(1) &= f'(1)e^{-1} - f(1)e^{-1} \\ &= 0 \cdot e^{-1} - e \cdot e^{-1} = -1 \end{aligned}$$

[40% 배점]

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 1), \quad \text{즉 } y = -x + 2$$

이므로 접선의 y 절편은 2이다.

[30% 배점]

답 2

0555 점 R에서 그은 접선이 $\overline{PQ}$ 와 평행할 때 $\triangle PQR$ 의 넓이가 최대가 된다. [50% 배점]

$$f(x) = \ln x^2 \text{으로 놓으면} \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

이므로 점 R에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = \frac{2}{t}$

한편, 두 점 P(1, 0), Q(e, 2)를 잇는 직선의 기울기는

$$\frac{2}{e-1} \text{이므로}$$

$$\frac{2}{t} = \frac{2}{e-1} \quad \therefore t = e-1 \quad [50\% \text{ 배점}]$$

답 e-1

0556 $y = 4 \ln x$ 에서 $y' = \frac{4}{x}$ 이므로 두 점 P(a, 4 ln a),

Q(b, 4 ln b)에서의 접선의 기울기는 각각 $\frac{4}{a}$, $\frac{4}{b}$ 이다.

[20% 배점]

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{4}{a}, \tan \beta = \frac{4}{b}$$

또, $\alpha = \beta + 45^\circ$ 이므로

$$45^\circ = \alpha - \beta$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{4}{a} - \frac{4}{b}}{1 + \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{b}} = \frac{4b - 4a}{ab + 16} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\tan 45^\circ = 1 \text{이므로} \quad \frac{4b - 4a}{ab + 16} = 1$$

$$ab + 4a - 4b + 16 = 0$$

$$a(b+4) - 4(b+4) = -32$$

$$\therefore (a-4)(b+4) = -32$$

$b > a > 1$, a, b는 정수이므로

$$a-4 > -3, b+4 > 5$$

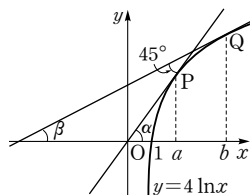
따라서 (a-4, b+4)의 순서쌍은

$$(-2, 16), (-1, 32)$$

이므로 a, b의 값은

$$a=2, b=12 \text{ 또는 } a=3, b=28 \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$\text{답 } a=2, b=12 \text{ 또는 } a=3, b=28$$



III. 미분법

05 도함수의 활용(2)

0557 $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

따라서 오른쪽 증감표에서 $f(x)$ 는 $x < 0$ 일 때 감소하고 $x > 0$ 일 때 증가한다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

답 풀이 참조

0558 $f'(x) = -\sin x - 1$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sin x = -1 \quad \therefore x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

x	0	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\searrow$	$1-2\pi$

따라서 위의 증감표에서 $f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

0559 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 1$$

x	...	(0)	...	1	...
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	e	$\nearrow$

따라서 위의 증감표에서 $f(x)$ 는 $x < 0$ 또는 $0 < x < 1$ 일 때 감소하고 $x > 1$ 일 때 증가한다.

답 풀이 참조

0560 $f(x) = x - \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 1$$

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 위의 표에서 $f(x)$ 는 $0 < x < 1$ 일 때 감소하고 $x > 1$ 일 때 증가한다.

답 풀이 참조

0561 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$ 에서 $x \neq -1$ 이고

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+1)-(x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $-x^2+2x=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f(2) = \frac{1}{3}$, 극소값은 $f(0) = -1$ 이다.

답 극대값 $\frac{1}{3}$, 극소값 -1

0562 $f'(x) = 1 + 2 \cos x$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$	$\searrow$	π

따라서 $f(x)$ 의 극대값은

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

답 극대값 $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$

0563 $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$

$f'(x)=0$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)$ 의 극소값은

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

답 극소값 $-\frac{1}{2e}$

0564 $f(x) = -x \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln x - 1$$

$f'(x)=0$ 에서 $\ln x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$

답 극대값 $\frac{1}{e}$

0565 $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 에서 $\frac{1}{x^2} = 4, \quad x^2 = \frac{1}{4}$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

이 때, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -16 < 0$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 16 > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극대

값은 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$, 극소값은 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ 이다.

답 극대값 -4 , 극소값 4

0566 $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ 에서 $0 \leq x \leq 2$ 이고

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{2x-x^2} - (1-x) \cdot \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$= \frac{-(2x-x^2) - (1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

이 때, $f''(1) = -1 < 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극대값은

$$f(1) = 1$$

답 극대값 1

0567 $f'(x) = -\sin x - \cos x$

$$f''(x) = -\cos x + \sin x$$

$f'(x)=0$ 에서 $\sin x = -\cos x$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

이 때, $f''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2} > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극소값은

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}$$

답 극소값 $-\sqrt{2}$

0568 $f'(x) = e^x(x^2+x+1) + e^x(2x+1)$

$$= e^x(x^2+3x+2)$$

$$= e^x(x+2)(x+1)$$

$$f''(x) = e^x(x^2+3x+2) + e^x(2x+3)$$

$$= e^x(x^2+5x+5)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = -1$

이 때, $f''(-2) = -\frac{1}{e^2} < 0$, $f''(-1) = \frac{1}{e} > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극

대값은 $f(-2) = \frac{3}{e^2}$, 극소값은 $f(-1) = \frac{1}{e}$ 이다.

답 극대값 $\frac{3}{e^2}$, 극소값 $\frac{1}{e}$

0569 $f(x) = x^2 \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고
 $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$

$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3$

$f'(x) = 0$ 에서 $\ln x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

이 때, $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극소값은

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ 답 극소값 $-\frac{1}{2e}$

0570 $f'(x) = \frac{(2x+3)(x-3) - (x^2+3x+7)}{(x-3)^2}$
 $= \frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2} = \frac{(x+2)(x-8)}{(x-3)^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 8 \quad (\because 4 \leq x \leq 9)$

x	4	...	8	...	9
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	35	$\searrow$	19	$\nearrow$	$\frac{115}{6}$

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(4) = 35$, 최소값은 $f(8) = 19$ 이다.

답 최대값 35, 최소값 19

0571 $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$

x	-2	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(0) = 2$, 최소값은 $f(-2) = f(2) = 0$ 이다.

답 최대값 2, 최소값 0

0572 $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $\cos x = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	1

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, 최소값은 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2}\pi$ 이다.

답 최대값 $\frac{\pi}{2}$, 최소값 $-\frac{3}{2}\pi$

0573 $f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x = 2 \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1)$
 $= 2(2 \cos^2 x + \cos x - 1)$
 $= 2(\cos x + 1)(\cos x - 1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = -1$ 또는 $\cos x = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 최소값은 $f(0) = f(\pi) = 0$

이다. 답 최대값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 최소값 0

0574 $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$

x	-2	...	-1	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	e

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(1) = e$, 최소값은 $f(-1) = -\frac{1}{e}$ 이다.

답 최대값 e , 최소값 $-\frac{1}{e}$

0575 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^4}$

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(0) = 1$, 최소값은 $f(2) = \frac{1}{e^4}$ 이다.

답 최대값 1, 최소값 $\frac{1}{e^4}$

0576 $f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$ $f'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{e}$	...	$\frac{1}{2}$	...	e
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\frac{2}{e} + 1$	$\searrow$	$1 + \ln 2$	$\nearrow$	$2e - 1$

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(e) = 2e - 1$, 최소값은

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln 2$ 이다.

답 최대값 $2e - 1$, 최소값 $1 + \ln 2$

0577 $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f'(x) = 0$ 에서

$\ln x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$

x	$\frac{1}{e^2}$	...	$\frac{1}{e}$	...	e
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	e

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(e) = e$, 최소값은 $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ 이다.

답 최대값 e , 최소값 $-\frac{1}{e}$

0578 $y = x^2 - \ln x^2$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$y' = 2x - \frac{2x}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$$

$$= \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

$y' < 0$ 에서 $\frac{2(x+1)(x-1)}{x} < 0$

$x(x+1)(x-1) < 0$

$\therefore x < -1$ 또는 $0 < x < 1$

답 ④

0579 $y' = \frac{x^2 + 5 - (x-2) \cdot 2x}{(x^2 + 5)^2}$

$$= \frac{-x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)(x-5)}{(x^2 + 5)^2}$$

$(x^2 + 5)^2 > 0$ 이므로 $y' > 0$ 에서

$-(x+1)(x-5) > 0, \quad (x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < 5$

답 ②

0580 $f(x) = 2x + \sqrt{10 - x^2}$ 에서 $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ 이고

$$f'(x) = 2 + \frac{-2x}{2\sqrt{10 - x^2}} = \frac{2\sqrt{10 - x^2} - x}{\sqrt{10 - x^2}}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$2\sqrt{10 - x^2} = x$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 = 8$

$\therefore x = 2\sqrt{2} \quad (\because x = -2\sqrt{2}$ 는 무연근)

x	$-\sqrt{10}$	...	$2\sqrt{2}$	...	$\sqrt{10}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-2\sqrt{10}$	$\nearrow$	$5\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{10}$

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 $(-\sqrt{10}, 2\sqrt{2})$ 이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$-3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -3$

답 ①

0581 $f'(x) = \frac{e^x(2x^2 + 1) - e^x \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(2x^2 - 4x + 1)}{(2x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

x	...	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}}{4-2\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\frac{e^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}{4+2\sqrt{2}}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은 $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

이므로 $\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \beta - \alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

답 ④

0582 $f(x) = x - \ln(x^2 + a)$ 에서 $x^2 + a > 0$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + a} = \frac{x^2 - 2x + a}{x^2 + a}$$

$x^2 + a > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이 성립하려면 $x^2 - 2x + a \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = 1 - a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1$

따라서 양수 a 의 최소값은 1이다.

답 ③

0583 $f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + 2)e^{-x}$

$$= \{-x^2 + (2-a)x + a-2\}e^{-x}$$

$e^{-x} > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이 성립하려면 $-x^2 + (2-a)x + a-2 \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $-x^2 + (2-a)x + a-2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (2-a)^2 + 4(a-2) \leq 0 \quad a^2 - 4 \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2$

따라서 정수 a 의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

답 ⑤

0584 $f(x) = a^2 \ln \frac{1}{x} - x^2 + 8x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = -\frac{a^2}{x} - 2x + 8 = \frac{-2x^2 + 8x - a^2}{x}$$

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이 성립하려면 $x > 0$ 에서 $-2x^2 + 8x - a^2 \leq 0$ 이어야 한다.

$g(x) = -2x^2 + 8x - a^2$ 으로 놓으면

$g(x) = -2(x-2)^2 + 8 - a^2$

$x > 0$ 에서 $g(x) \leq 0$ 이 성립하려면

$g(2) = 8 - a^2 \leq 0, \quad a^2 - 8 \geq 0$

$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2}) \geq 0$

$\therefore a \leq -2\sqrt{2}$ 또는 $a \geq 2\sqrt{2}$

따라서 보기 중 a 의 값이 될 수 없는 것은 2이다.

답 ③

$$\begin{aligned} 0585 \quad f'(x) &= \frac{(2x+a)(x^2+x+1) - (x^2+ax+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(1-a)x^2+a-1}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(1-a)(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
 $a < 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$2-a$	$\searrow$	$\frac{2+a}{3}$	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f(-1)=2-a$, 극소값은 $f(1)=\frac{2+a}{3}$ 이므로

$$a+3\beta=2-a+3\cdot\frac{2+a}{3}=4$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0586 \quad f'(x) &= \frac{a(x^2+4)-ax\cdot 2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{-a(x^2-4)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{-a(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
 $a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극소값, $x=2$ 에서 극대값을 가지므로
 $\alpha=2, \beta=-2$
 $\therefore \alpha-\beta=4$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0587 \quad f(x) &= x + \frac{1}{x} \text{에서 } x \neq 0 \text{이고} \\ f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} \\ f'(x)=0 \text{에서 } &x=-1 \text{ 또는 } x=1 \end{aligned}$$

x	...	-1	...	(0)	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f(-1)=-2$, 극소값은 $f(1)=2$ 이므로

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{-2}{-1} + \frac{2}{1} = 4$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0588 \quad f(x) &= x + \sqrt{1-x^2} \text{에서 } -1 \leq x \leq 1 \text{이고} \\ f'(x) &= 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \text{에서 } &\sqrt{1-x^2}=x \\ \text{양변을 제곱하면 } &1-x^2=x^2, \quad 2x^2=1 \\ \therefore x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\because x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{은 무연근} \right) \end{aligned}$$

x	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

답 ③

$$\begin{aligned} 0589 \quad f(x) &= \sqrt{x} + \sqrt{4-x} \text{에서 } 0 \leq x \leq 4 \text{이고} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \text{에서 } &\sqrt{4-x}=\sqrt{x} \\ \text{양변을 제곱하면 } &4-x=x \quad \therefore x=2 \end{aligned}$$

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f(2)=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 0590 \quad f(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{2-x}} \text{에서 } x < -2 \text{ 또는 } -2 < x \leq 2 \text{이고} \\ f'(x) &= -\frac{1+\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{(x+\sqrt{2-x})^2} \\ &= -\frac{2\sqrt{2-x}-1}{2\sqrt{2-x}(x+\sqrt{2-x})^2} \end{aligned}$$

[30% 배점]

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \text{에서 } &2\sqrt{2-x}=1 \\ 2-x &= \frac{1}{4} \quad \therefore x = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

x	...	(-2)	...	$\frac{7}{4}$	...	2
$f'(x)$	-		-	0	+	
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

[40% 배점]

따라서 $f(x)$ 의 극소값은 $f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{4}{9}$

[30% 배점]

답 $\frac{4}{9}$

0591 $f'(x) = -4 \sin x + 2 \sin 2x$
 $= -4 \sin x + 4 \sin x \cos x = 4 \sin x (\cos x - 1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 1$
 $\therefore x = \pi$ ($\because 0 < x < 2\pi$)

x	(0)	...	π	...	(2π)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		\	-5	/	

따라서 $f(x)$ 의 극소값은 $f(\pi) = -5$ 이므로

$a = \pi, b = -5 \quad \therefore ab = -5\pi$

답 ①

다른 풀이 $f'(x) = 4 \sin x (\cos x - 1)$
 $f''(x) = 4 \cos x (\cos x - 1) + 4 \sin x \cdot (-\sin x)$
 $= 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 4 \sin^2 x$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = \pi$
 이 때, $f''(\pi) = 8 > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극소값은 $f(\pi) = -5$
 $\therefore ab = \pi \cdot (-5) = -5\pi$

0592 $f'(x) = -\sin x \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cos x$
 $= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x$
 $= 2 \cos^2 x + \cos x - 1$
 $= (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = \frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = -1$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3}$ ($\because 0 < x < 2\pi$)

x	(0)	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	(2π)
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \therefore ab = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

답 ②

0593 $f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x (\sqrt{\sin x} - 1)}{\sqrt{\sin x}}$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = 0$ 또는 $\sin x = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 < x < \pi$)

x	(0)	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

따라서 $f(x)$ 의 극소값은 $f(\frac{\pi}{2}) = -1$ 이므로

$a = \frac{\pi}{2}, b = -1 \quad \therefore \frac{a}{b} = -\frac{\pi}{2}$

답 ③

0594 $f'(x) = -2 \sin 2x - 2 \cos x$
 $= -4 \sin x \cos x - 2 \cos x$
 $= -2 \cos x (2 \sin x + 1)$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = 0$ 또는 $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 < x < \pi$)

x	(0)	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

따라서 $f(x)$ 의 극소값은 $f(\frac{\pi}{2}) = -3$

답 ①

0595 $f'(x) = 3 \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6 \sin^2 2x \cos 2x$
 $f'(x) = 0$ 에서

$\sin 2x = 0$ 또는 $\cos 2x = 0$

$0 < x < \pi$ 에서 $0 < 2x < 2\pi$ 이므로

$2x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $2x = \pi$ 또는 $2x = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3\pi}{4}$

x	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	(π)
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극대이고 $x = \frac{3\pi}{4}$ 에서 극소이므로

$0 < x < \pi$ 에서 극대 또는 극소가 되는 점은 2개이다.

답 ②

0596 $f'(x) = \sec^2 x - 2$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $\sec^2 x = 2$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x = -\frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{\pi}{4}$ ($\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$)

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\dots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\dots$	$\frac{\pi}{4}$	$\dots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\pi}{4}$ 에서 극대, $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극소이므로

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 극대 또는 극소가 되는 점은 2개이다.

답 2

0597 $f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)e^{-x} = (2-x^2)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x^2 = 2$

$\therefore x = \pm \sqrt{2}$

x	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$	$\searrow$

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f(\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$, 극소값은 $f(-\sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$ 이므로 극대값과 극소값의 곱은 $(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \cdot (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} = -4$

답 ①

다른 풀이 $f'(x) = (2-x^2)e^{-x}$

$$f''(x) = -2xe^{-x} - (2-x^2)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \pm\sqrt{2}$$

이 때, $f''(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}} > 0$, $f''(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \cdot e^{-\sqrt{2}} < 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극대값은 $f(\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$, 극소값은 $f(-\sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$ 이다.

0598 $f'(x) = e^{x+1} - e^2$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^{x+1} = e^2$$

$$\therefore x = 1$$

따라서 $f(x)$ 의 극소값은 $f(1) = 0$ 이므로

$$a = 1, m = 0 \quad \therefore a + m = 1$$

답 1

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

0599 $f'(x) = e^x - ke^{-x} = \frac{(e^x)^2 - k}{e^x} = \frac{(e^x + \sqrt{k})(e^x - \sqrt{k})}{e^x}$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x = \sqrt{k} \quad (\because e^x > 0)$$

$$\therefore x = \ln \sqrt{k} = \frac{1}{2} \ln k$$

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 극소값만 가진다.

$$\text{ㄴ. } f\left(\frac{1}{2} \ln k\right) = 2\sqrt{k} \text{이므로}$$

$x = \frac{1}{2} \ln k$ 에서 극소값 $2\sqrt{k}$ 를 가진다.

$$\text{ㄷ. } \frac{1}{2} \ln k = 1 \text{에서 } \ln k = 2 \quad \therefore k = e^2$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

x	...	$\frac{1}{2} \ln k$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$2\sqrt{k}$	$\nearrow$

0600 $f(x) = x^2 - \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because x > 0)$$

x	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 의 극소값은 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$

답 ⑤

다른 풀이 $f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$

$$f''(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이 때, $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극소값은

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$$

0601 $f(x) = x(\ln x)^2$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = (\ln x + 2) \ln x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = -2 \text{ 또는 } \ln x = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{e^2} \text{ 또는 } x = 1$$

x	(0)	...	$\frac{1}{e^2}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 의 극대값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$, 극소값은 $f(1) = 0$ 이므로 극대값과 극소값의 합은 $\frac{4}{e^2}$ 이다.

답 ②

0602 $f(x) = e^x - 2 \ln(x+2) + 1$ 에서 $x > -2$ 이고

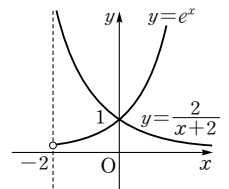
$$f'(x) = e^x - \frac{2}{x+2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x = \frac{2}{x+2}$$

이 방정식의 해는 두 곡선 $y = e^x$,

$y = \frac{2}{x+2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다

따라서 오른쪽 그림에서 $x = 0$



x	(-2)	...	0	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$2(1 - \ln 2)$	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소값 $2(1 - \ln 2)$ 를 가진다.

답 ②

0603 $f'(x) = \frac{(2ax-4)(x^2-1) - (ax^2-4x+b) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{2[2x^2 - (a+b)x + 2]}{(x^2-1)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극소값 0을 가지므로 $f(2) = 0, f'(2) = 0$

$$\therefore \frac{4a-8+b}{3}=0, \frac{20-4(a+b)}{9}=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=4$

$$\therefore a-b=-3$$

답 ①

0604 $f'(x)=2ax+1+\frac{b}{x}$

$f(x)$ 가 $x=1, x=2$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1)=0, f'(2)=0$$

$$\therefore 2a+1+b=0, 4a+1+\frac{b}{2}=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{6}, b=-\frac{2}{3}$

$$\therefore a+b=-\frac{5}{6}$$

답 ①

0605 $f'(x)=a \cos x+b \sin x$

[30% 배점]

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{2}{3}\pi$ 에서 극대값 -1 을 가지므로

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-1, f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=-1, -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0$$

[40% 배점]

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}, b=-\frac{1}{2}$

$$\therefore ab=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

[30% 배점]

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

0606 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x^3-x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{3}{x}-1=\frac{-x^2+3x-a}{x^2}$$

이므로 $f(x)$ 가 극대값과 극소값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+3x-a=0$ 이 $x>0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 판별식을 D 라 하면

$$D=9-4a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{4}$$

(ii) 두 근의 합 : $3>0$

(iii) 두 근의 곱 : $a>0$

이상에서 a 의 값의 범위는 $0<a<\frac{9}{4}$ 이므로 구하는 정수 a 의 값의

합은 $1+2=3$

답 ②

0607 $f'(x)=x^2-8x \sin \theta+8(\cos \theta+2)$

$f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=16 \sin^2 \theta-8(\cos \theta+2) \leq 0$$

$$16(1-\cos^2 \theta)-8(\cos \theta+2) \leq 0$$

$$2 \cos^2 \theta+\cos \theta \geq 0, \quad \cos \theta(2 \cos \theta+1) \geq 0$$

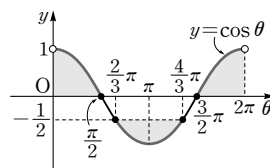
$$\therefore \cos \theta \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta \geq 0$$

$0<\theta<2\pi$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$0<\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{3}{2}\pi \leq \theta < 2\pi$$



따라서 주어진 보기 중 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않도록 하는 θ 의 값은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

답 ④

0608 $\sin x=t$ ($-1<t<1$)로 놓으면 $y=t^3+at^2+at$

$$f(t)=t^3+at^2+at \text{로 놓으면 } f'(t)=3t^2+2at+a$$

함수 $f(t)$ 가 $-1<t<1$ 에서 극대값과 극소값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(t)=0$ 이 $-1<t<1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $f'(t)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3a>0, \quad a(a-3)>0$$

$$\therefore a<0 \text{ 또는 } a>3$$

(ii) $y=f'(t)$ 의 그래프의 대칭축이 직선 $x=-\frac{a}{3}$ 이므로

$$-1<-\frac{a}{3}<1 \quad \therefore -3<a<3$$

$$\text{(iii) } f'(-1)=3-2a+a>0 \quad \therefore a<3$$

$$\text{(iv) } f'(1)=3+2a+a>0 \quad \therefore a>-1$$

이상에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$-1<a<0$$

답 ③

0609 $f'(x)=k+2 \cos x$

이 때, $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \leq 0 \text{ 또는 } f'(x) \geq 0$$

즉, $k+2 \cos x \leq 0$ 또는 $k+2 \cos x \geq 0$ 이어야 하므로

$$\cos x \leq -\frac{k}{2} \text{ 또는 } \cos x \geq -\frac{k}{2}$$

$$\text{그런데 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -\frac{k}{2} \geq 1 \text{ 또는 } -\frac{k}{2} \leq -1$$

$$\therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 2$$

따라서 양의 정수 k 의 최소값은 2이다.

답 ②

0610 $f'(x)=1+k \cos x$

$f(x)$ 가 항상 극값을 갖기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근이 존재하고, 그 실근의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$1+k \cos x=0 \text{에서 } \cos x=-\frac{1}{k}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -1 < -\frac{1}{k} < 1$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 1, \text{ 즉 } |k| > 1$$

답 ③

0611 $f'(x) = (3x^2 + 6x)e^{-x} - (x^3 + 3x^2 + a)e^{-x}$
 $= -e^{-x}(x^3 - 6x + a)$

$f(x)$ 가 극대값과 극소값을 모두 가지려면 방정식 $x^3 - 6x + a = 0$ 이 2개 이상의 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

즉, $g(x) = x^3 - 6x + a$ 로 놓으면 삼차함수 $g(x)$ 의 극대값과 극소값의 부호가 서로 달라야 한다.

$g'(x) = 3x^2 - 6$ 이므로 $g'(x) = 0$ 에서 $x^2 = 2$
 $\therefore x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = \sqrt{2}$

$g(-\sqrt{2})g(\sqrt{2}) < 0$ 이어야 하므로 $(a + 4\sqrt{2})(a - 4\sqrt{2}) < 0$
 $\therefore -4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$

따라서 정수 a 의 값은 $-5, -4, \dots, 4, 5$ 의 11개이다.

답 ⑤

0612 $f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1) - x(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$
 $= \frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{2}{7}$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(1) = 1$, 최소값은 $f(-1) = -\frac{1}{3}$ 이므로

그 합은 $1 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

답 ②

0613 $f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{3}{2}$ ($\because x > 1$)

x	(1)	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 의 최소값은 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$ 이므로

$a = \frac{3}{2}, m = \frac{27}{4} \therefore \frac{a}{m} = \frac{2}{9}$

답 ①

0614 $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$ 이고

$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{(4-x^2) - x^2}{\sqrt{4-x^2}}$
 $= \frac{-2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x^2 - 2 = 0$

$\therefore x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = \sqrt{2}$

x	-2	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(\sqrt{2}) = 2$, 최소값은 $f(-\sqrt{2}) = -2$ 이므로

$M = 2, m = -2$

$\therefore M - m = 2 - (-2) = 4$

답 ③

0615 $f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}}$
 $= \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

[30% 배점]

$f'(x)$ 에서 $x = -2$

x	-3	...	-2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$3\sqrt{6}$

[40% 배점]

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(3) = 3\sqrt{6}$, 최소값은 $f(-2) = -2$ 이므로 최대값과 최소값의 합은 $3\sqrt{6} - 2$ 이다.

[30% 배점]

답 $3\sqrt{6} - 2$

0616 $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{5x+10}$ 에서 $-2 \leq x \leq 1$ 이고

$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{5}{2\sqrt{5x+10}} = \frac{-\sqrt{5x+10} + 5\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}\sqrt{5x+10}}$

$f'(x) = 0$ 에서 $\sqrt{5x+10} = 5\sqrt{1-x}$

양변을 제곱하면 $5x+10 = 25(1-x)$

$30x = 15 \therefore x = \frac{1}{2}$

x	-2	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$\sqrt{15}$

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{2}$, 최소값은 $f(-2) = \sqrt{3}$ 이므로

$M = 3\sqrt{2}, m = \sqrt{3}$

$\therefore M^2 + m^2 = 18 + 3 = 21$

답 21

0617 $f'(x) = a - 2a \sin 2x = a(1 - 2 \sin 2x)$

$f'(x) = 0$ 에서 $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로

$2x = \frac{\pi}{6} \therefore x = \frac{\pi}{12}$

x	0	...	$\frac{\pi}{12}$	...	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	a	$\nearrow$	$\frac{a}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\searrow$	$\frac{a}{4}\pi$

이 때, $f(x)$ 의 최소값이 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{4}\pi$ 이므로

$$\frac{a}{4}\pi = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

따라서 $f(x)$ 의 최대값은

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 0618 \quad f'(x) &= \cos x(1 - \cos x) + \sin x \cdot \sin x \\ &= \cos x - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x) \\ &= -2\cos^2 x + \cos x + 1 \\ &= -(\cos x - 1)(2\cos x + 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \cos x = 1 \text{ 또는 } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0

따라서 $f(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 에서 극대이며 최대이므로

$$a = \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} 0619 \quad f'(x) &= \cos x + 2\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\ &= \cos x + 2\cos 2x \cos x - 2\sin x \cos x \cdot \sin x \\ &= \cos x(1 + 2\cos 2x - 2\sin^2 x) \\ &= \cos x \cdot 3\cos 2x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \cos x = 0 \text{ 또는 } \cos 2x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

답 ④

$$\begin{aligned} 0620 \quad y &= \sin x \cos^2 x = \sin x(1 - \sin^2 x) \\ &= -\sin^3 x + \sin x \end{aligned}$$

이 때, $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$y = -t^3 + t, \quad y' = -3t^2 + 1$$

$$y' = 0 \text{에서} \quad t^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

t	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1
y'		-	0	+	0	-	
y	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

따라서 주어진 함수의 최대값은 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 최소값은 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 이므로

$$M = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad m = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore M^2 + m^2 = \frac{12}{81} + \frac{12}{81} = \frac{8}{27}$$

답 ①

0621 $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면 주어진 식은

$$y = 2t^3 + 3t^2 \quad \therefore y' = 6t^2 + 6t = 6t(t + 1)$$

$$y' = 0 \text{에서} \quad t = -1 \text{ 또는 } t = 0$$

t	-1	...	0	...	1
y'		-	0	+	
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

따라서 구하는 최소값은 0이다.

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0622 \quad y &= \cos^3 \theta - 3\sin^2 \theta + k = \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) + k \\ &= \cos^3 \theta + 3\cos^2 \theta + k - 3 \end{aligned}$$

$\cos \theta = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면 주어진 식은

$$y = t^3 + 3t^2 + k - 3 \quad \therefore y' = 3t^2 + 6t = 3t(t + 2)$$

$$y' = 0 \text{에서} \quad t = 0 \quad (\because -1 \leq t \leq 1)$$

t	-1	...	0	...	1
y'		-	0	+	
y	$k-1$	$\searrow$	$k-3$	$\nearrow$	$k+1$

따라서 주어진 함수의 최대값은 $k+1$ 이므로

$$k+1 = 5 \quad \therefore k = 4$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0623 \quad y &= \sin^3 x + \cos^3 x \\ &= (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x(\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

$\sin x + \cos x = t$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$)로 놓으면

$$1 + 2\sin x \cos x = t^2, \quad \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

이므로 주어진 식은

$$y = t^3 - 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \cdot t = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

$$\therefore y' = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}$$

$$y' = 0 \text{에서} \quad -\frac{3}{2}(t+1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

t	$-\sqrt{2}$	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 주어진 함수의 최대값은 1, 최소값은 -1 이므로

$$M=1, m=-1$$

$$\therefore Mm=-1$$

답 1

$$\begin{aligned} 0624 \quad y' &= 2xe^{-2x} - 2(x^2-2)e^{-2x} = -2(x^2-x-2)e^{-2x} \\ &= -2(x+1)(x-2)e^{-2x} \end{aligned}$$

$$y'=0 \text{에서} \quad x=2 \quad (\because 0 \leq x \leq 3)$$

x	0	$\dots$	2	$\dots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	$\frac{2}{e^4}$	$\searrow$	$\frac{7}{e^6}$

따라서 최대값은 $\frac{2}{e^4}$, 최소값은 -2 이므로 그 곱은

$$\frac{2}{e^4} \cdot (-2) = -\frac{4}{e^4}$$

답 2

$$0625 \quad f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x+1} - x^2 \cdot e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} = \frac{x(2-x)}{e^{x+1}}$$

[30% 배점]

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=2 \quad (\because x>0)$$

x	(0)	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

[40% 배점]

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이며 최대이므로

$$a=2$$

[30% 배점]

답 2

$$0626 \quad f'(x) = 3 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = 2 - \ln x$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \ln x=2 \quad \therefore x=e^2$$

x	1	$\dots$	e^2	$\dots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0

따라서 $f(x)$ 는 $x=e^2$ 에서 극대이며 최대이고, $x=e^3$ 일 때 최소이므로

$$\alpha=e^2, \beta=e^3$$

$$\therefore \alpha\beta=e^2 \cdot e^3=e^5$$

답 e^5

$$0627 \quad f(x) = x \ln e^2 x + e^0 \text{에서} \quad x>0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \ln e^2 x + x \cdot \frac{e^2}{e^2 x} = \ln e^2 x + 1$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \ln e^2 x = -1, \quad e^2 x = \frac{1}{e} \quad \therefore x = \frac{1}{e^3}$$

x	(0)	$\dots$	$\frac{1}{e^3}$	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e^3} + e^0$	$\nearrow$

이 때, $f(x)$ 의 최소값이 $-\frac{1}{e^3} + e^0$ 이므로

$$-\frac{1}{e^3} + e^0 = 0, \quad e^0 = e^{-3}$$

$$\therefore a = -3$$

답 3

$$0628 \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \text{에서} \quad x>0 \text{이고}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x)2x}{x^4} \\ &= \frac{1-2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

[30% 배점]

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$1-2\ln x=0, \quad \ln x=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\sqrt{e}$$

x	(0)	$\dots$	$\sqrt{e}$	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$

[40% 배점]

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

[30% 배점]

답 $\frac{1}{2e}$

0629 원점과 점 $(e^{2t}, \sqrt{2}e^{-t})$ 사이의 거리를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{(e^{2t})^2 + (\sqrt{2}e^{-t})^2} = \sqrt{e^{4t} + 2e^{-2t}}$$

$e^{2t}=k$ ($k>0$)로 놓으면 $l = \sqrt{k^2 + \frac{2}{k}}$ 이므로 양변을 k 에 대하여 미분하면

$$\frac{dl}{dk} = \frac{2k - \frac{2}{k^2}}{2\sqrt{k^2 + \frac{2}{k}}} = \frac{k - \frac{1}{k^2}}{\sqrt{k^2 + \frac{2}{k}}}$$

$$\frac{dl}{dk}=0 \text{에서} \quad k = \frac{1}{k^2}, \quad k^3 - 1 = 0$$

$$(k-1)(k^2+k+1)=0$$

$$\therefore k=1$$

k	(0)	$\dots$	1	$\dots$
$\frac{dl}{dk}$		$-$	0	$+$
l		$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

따라서 최소값은 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\therefore m^2=3$$

답 3

0630 두 곡선 $y=e^x$ 과 $y=\ln x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 선분 PQ가 직선 $y=x$ 에 수직이므로 점 P와 Q는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

점 P의 좌표를 $P(t, e^t)$ 이라 하면 $Q(e^t, t)$ 이다.

$$\therefore PQ = \sqrt{(e^t - t)^2 + (t - e^t)^2} = \sqrt{2(e^t - t)^2} = \sqrt{2}(e^t - t) \quad (\because e^t > t)$$

$f(t) = \sqrt{2}(e^t - t)$ 로 놓으면

$$f'(t) = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

$f'(t) = 0$ 에서 $e^t = 1 \quad \therefore t = 0$

따라서 $f(t)$ 의 최소값은

$$f(0) = \sqrt{2}$$

t	...	0	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$

답 ②

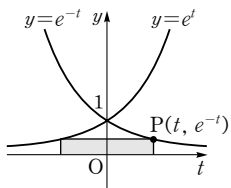
0631 제1사분면에 있는 직사각형의 꼭지점을 $P(t, e^{-t})$ ($t > 0$), 직사각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = 2te^{-t}$$

$$S'(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t}$$

$$= -2(t-1)e^{-t}$$

$S'(t) = 0$ 에서 $t = 1$



t	(0)	$\dots$	1	$\dots$
$S'(t)$		+	0	−
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

따라서 $S(t)$ 의 최대값은

$$S(1) = \frac{2}{e}$$

답 ①

0632 $y' = \cos x$ 이므로 곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $P(\theta, \sin \theta)$ 에서 접선의 방정식은

$$y - \sin \theta = \cos \theta (x - \theta)$$

$$\therefore y = x \cos \theta - \theta \cos \theta + \sin \theta$$

$x = 0$ 을 대입하면 $y = -\theta \cos \theta + \sin \theta$

$x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면 $y = \frac{\pi}{2} \cos \theta - \theta \cos \theta + \sin \theta$

이므로 사다리꼴의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ (-\theta \cos \theta + \sin \theta) + \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta - \theta \cos \theta + \sin \theta \right) \right\} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} \cos \theta + \frac{\pi}{2} (\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

$$S'(\theta) = -\frac{\pi^2}{8} \sin \theta + \frac{\pi}{2} (\cos \theta - \cos \theta + \theta \sin \theta)$$

$$= -\frac{\pi^2}{8} \sin \theta + \frac{\pi}{2} \theta \sin \theta = \frac{\pi}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \sin \theta$$

$S'(\theta) = 0$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

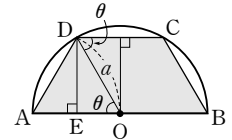
θ	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$(\frac{\pi}{2})$
$S'(\theta)$		-	0	+	
$S(\theta)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 $S(\theta)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 에서 극소이며 최소이다.

$$\therefore k = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0633 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면



$$S(\theta) = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{DE}$$

$$= \frac{1}{2} (2a + 2a \cos \theta) \cdot a \sin \theta$$

$$= a^2 \sin \theta (1 + \cos \theta) \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

[30% 배점]

$$S'(\theta) = a^2 \cos \theta (1 + \cos \theta) + a^2 \sin \theta (-\sin \theta)$$

$$= a^2 (\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= a^2 \{\cos \theta + \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta)\}$$

$$= a^2 (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$$

$$= a^2 (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

[30% 배점]

$S'(\theta) = 0$ 에서 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 또는 $\cos \theta = -1$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

θ	(0)	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	$\searrow$	

따라서 $S(\theta)$ 의 최대값은 $S(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ 이므로

$$k = \frac{1}{3}, l = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \therefore kl = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

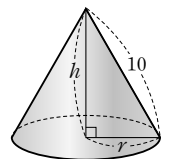
[40% 배점]

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

0634 잘라낸 부채꼴로 오른쪽 그림과 같은 원뿔을 만들었을 때, 밑면의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$10\theta = 2\pi r$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{5}\pi r \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



원뿔의 높이를 h 라 하면 $h = \sqrt{100 - r^2}$ 이므로 원뿔의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{100 - r^2} \quad (0 < r < 10)$$

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \frac{1}{3}\pi \left(2r\sqrt{100-r^2} + r^2 \cdot \frac{-2r}{2\sqrt{100-r^2}} \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2r(100-r^2) - r^3}{\sqrt{100-r^2}} = \frac{-\pi r(3r^2-200)}{3\sqrt{100-r^2}}\end{aligned}$$

$\frac{dV}{dr}=0$ 에서 $r^2=\frac{200}{3} \quad \therefore r=\frac{10\sqrt{6}}{3} (\because r>0)$

r	(0)	...	$\frac{10\sqrt{6}}{3}$	...	(10)
$\frac{dV}{dr}$		+	0	-	
V		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $r=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ 에서 부피 V 가 극대이며 최대이므로 ㉠에서 V 가

최대가 되도록 하는 θ 의 값은 $\frac{\pi}{5} \cdot \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ **답 ④**

0635 오른쪽 그림과 같이 직원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 x , 높이를 $y+1$, 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (y+1) \quad (y>1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, $\triangle ABC \sim \triangle ADO$ 이므로

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{DO} : \overline{AD}$$

$$x : (y+1) = 1 : \sqrt{y^2-1}$$

$$\therefore x = \frac{y+1}{\sqrt{y^2-1}}$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{(y+1)^3}{y^2-1} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(y+1)^2}{y-1}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2(y+1)(y-1) - (y+1)^2}{(y-1)^2}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(y+1)(y-3)}{(y-1)^2}$$

$\frac{dV}{dy}=0$ 에서 $y=3 (\because y>1)$

y	(1)	...	3	...
$\frac{dV}{dy}$		-	0	+
V		$\searrow$	$\frac{8}{3}\pi$	$\nearrow$

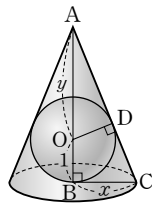
따라서 V 의 최소값은 $\frac{8}{3}\pi$ 이다. **답 ⑤**

0636 저장 탱크의 밑면의 한 변의 길이를 a m, 높이를 b m라 하면 저장 탱크의 부피는 a^2b m³이므로

$$a^2b=64 \quad \therefore b=\frac{64}{a^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

저장 탱크를 만드는 데 필요한 철판의 구입 가격을 $f(a)$ 라 하면

$$f(a)=8a^2+4\cdot 4ab$$



이므로 ㉠을 대입하면

$$f(a)=8a^2+4\cdot 4a\cdot \frac{64}{a^2}=8a^2+16\cdot \frac{64}{a} \quad (a>0)$$

$$f'(a)=16a-\frac{16\cdot 64}{a^2}=\frac{16(a-4)(a^2+4a+16)}{a^2}$$

$f'(a)=0$ 에서 $a=4$

a	(0)	$\dots$	4	$\dots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$	384	$\nearrow$

따라서 $f(a)$ 의 최소값은 $f(4)=384$ 이므로 구하는 최소 비용은 384만 원이다. **답 ④**

0637 새로운 도로와 도로 A, B가 만나는 점을 각각 C, D라 하면

$$\overline{CD}=\overline{QC}+\overline{QD}=\frac{16}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}$$

$$f(\theta)=\frac{16}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta} \quad (0<\theta<\frac{\pi}{2}) \text{로 놓}$$

으면

$$f'(\theta)=-\frac{16\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{-16\cos^3\theta+2\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

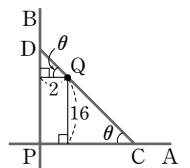
$$f'(\theta)=0 \text{에서} \quad -16\cos^3\theta+2\sin^3\theta=0$$

$$\tan^3\theta=8 \quad \therefore \tan\theta=2$$

$\tan\theta=2$ 를 만족하는 θ 의 값을 $\alpha (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 라 하면 $f(\theta)$ 의 증감표는 다음과 같다.

θ	(0)	...	α	...	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 $f(\theta)$ 는 $\theta=\alpha$ 에서 극소이며 최소이므로 새로운 직선 도로의 길이가 최소가 되도록 하는 $\tan\theta$ 의 값은 2이다. **답 2**



0638 $f(x)$ 의 역함수가 존재하면 $f(x)$ 는 일대일 대응이므로 증가함수 또는 감소함수이다.

그런데 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x+a)e^x + (x^2+ax+b)e^x \\ &= \{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x\end{aligned}$$

$e^x>0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이 성립하려면 $x^2+(a+2)x+a+b\geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(a+2)^2-4(a+b)\leq 0$$

$$a^2-4b+4\leq 0 \quad \therefore b\geq \frac{1}{4}a^2+1$$

따라서 점 (a, b) 가 존재하는 영역을 좌표평면에 나타내면 ③과 같다. **답 ③**

0639 보기의 함수는 모두 폐구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 연속이고 개구간

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1) \text{인 } x_1 \text{이 구간 } (a, b) \text{에 존재하고,}$$

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(x_2) \text{인 } x_2 \text{가 구간 } (b, c) \text{에 존재한다.}$$

따라서 주어진 조건으로부터 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 인 x_1, x_2 에 대하여

$f'(x_1) < f'(x_2)$ 가 성립하므로 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $y=f'(x)$ 가 증가함수이어야 한다.

$$\neg. f'(x)=1-\sin x, f''(x)=-\cos x \text{이고, } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$f''(x) < 0 \text{이므로 } f'(x) \text{는 감소함수이다.}$$

$$\neg. f'(x)=e^x-1, f''(x)=e^x \text{이고, } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } f''(x) > 0 \text{이므로}$$

$f'(x)$ 는 증가함수이다.

$$\neg. f'(x)=-\frac{1}{x}, f''(x)=\frac{1}{x^2} \text{이고, } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } f''(x) > 0 \text{이}$$

므로 $f'(x)$ 는 증가함수이다.

이상에서 조건을 만족하는 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ⑤

0640 $f(x)=\cos x$ 에서 $f'(x)=-\sin x$

구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 평균값의 정리를 만족하는 값이 c 이므로

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}=f'(c)=-\sin c$$

$$\therefore \sin c = -\frac{\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

답 2
π

0641 $AC = \frac{f(x)}{x} = g(x)$ 로 놓으면

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x} = \frac{MC - AC}{x}$$

$AC=g(x)$ 의 그래프가 $x=q$ 에서 극소값을 가지므로

(i) $0 < x < q$ 이면 $g'(x) < 0$ 이므로 $MC < AC$

(ii) $x=q$ 이면 $g'(x)=0$ 이므로 $MC=AC$

(iii) $x > q$ 이면 $g'(x) > 0$ 이므로 $MC > AC$

따라서 (i), (ii), (iii)의 조건을 모두 만족하는 그래프는 ④이다.

답 ④

0642 $\neg. f(-x) = -f(x)$ 의 양변을 미분하면

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad \therefore f'(-x) = f'(x)$$

$\neg. \text{[반례]} f(x)=\sin x \text{이면 } \sin(-x)=-\sin x \text{이고}$

$$f'(x)=\cos x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$\neg. \text{[반례]} f(x)=\sin x \text{이면 } \sin(-x)=-\sin x \text{이고}$

$$f'(x)=\cos x$$

함수 $f'(x)$ 는 $x=2\pi$ 에서 극대값을 갖고, $x=-2\pi$ 에서도 극대값을 가진다.

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0643 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x) = ax^3 + bx$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소값 -6 을 가지므로

$$f(1) = -6, f'(1) = 0$$

$$\therefore a + b = -6, 3a + b = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=-9$

$$\therefore f(x) = 3x^3 - 9x, f'(x) = 9x^2 - 9$$

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| \geq 0 \text{에서}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \geq 0, \quad f'(x)f(x) \geq 0 \quad (\because f(x) \neq 0)$$

이므로 $f'(x)f(x) \geq 0$ 에서

$$(9x^2 - 9)(3x^3 - 9x) \geq 0$$

$$27x(x+1)(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \geq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

그런데 $f(x) \neq 0$ 이므로

$$3x^3 - 9x \neq 0, \quad 3x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \neq 0$$

$$\therefore x \neq 0, x \neq \pm\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\sqrt{3} < x \leq -1$ 또는 $0 < x \leq 1$ 또는 $x > \sqrt{3}$

따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 있는 것은 -1 이다.

답 ③

0644 $f'(x) = a \cos x - b \sin x + 1$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{\pi}{3}, x=\pi$ 에서 극값을 가지므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, f'(\pi) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + 1 = 0, -a + 1 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=\sqrt{3}$ 이므로

$$g(x) = x - \ln x + \sqrt{3} \quad (x > 0), \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

따라서 오른쪽 증감표에서

$g(x)$ 의 극소값은

$1 + \sqrt{3}$ 이다.

x	(0)	...	1	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	$1 + \sqrt{3}$	$\nearrow$

답 1 + √3

0645 $y = x^{3-(\ln x)^2}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \ln x^{3-(\ln x)^2} = \{3 - (\ln x)^2\} \ln x$$

이 때, $\ln x = t$ ($t > 0$)라 하면 $\ln y = (3-t^2)t = -t^3 + 3t$
 $f(t) = -t^3 + 3t$ 로 놓으면
 $f'(t) = -3t^2 + 3 = -3(t+1)(t-1)$
 $f'(t) = 0$ 에서 $t = 1$ ($\because t > 0$)

t	(0)	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	2	↘

따라서 $f(t)$ 의 최대값은 $f(1) = 2$ 이므로 $\ln y = 2$ 에서 y 의 최대값은 e^2 이다. 답 ⑤

0646 삼각형 POA는 $\overline{OP} = \overline{OA}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle OPA = \angle OAP = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$\triangle POA$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PA}}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \frac{\pi - \theta}{2}}$$

$$\therefore \overline{PA} = \frac{r \sin \theta}{\sin \frac{\pi - \theta}{2}} = \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

또, $\angle POB = \pi - \theta$ 이므로 $\widehat{PB} = r(\pi - \theta)$

$l(\theta) = \overline{PA} + \frac{1}{2}\widehat{PB}$ 로 놓으면

$$l(\theta) = 2r \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}r(\pi - \theta) \quad (0 < \theta < \pi)$$

$$l'(\theta) = r \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}r = r \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$l'(\theta) = 0 \text{에서} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서} \quad 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{이므로} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

θ	(0)	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	(π)
$l'(\theta)$		+	0	-	
$l(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 $l(\theta)$ 는 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 에서 극대이며 최대이다. 답 ④

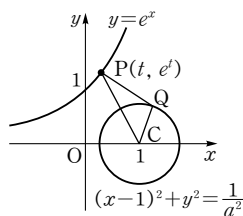
0647 곡선 $y = e^x$ 위의 임의의 점을 $P(t, e^t)$, 원의 중심을 $C(1, 0)$ 이라 하면

$$\overline{PQ} \geq \overline{CP} - \frac{1}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{(t-1)^2 + e^{2t}}$$

$f(t) = (t-1)^2 + e^{2t}$ 으로 놓으면

$$f'(t) = 2(t-1) + 2e^{2t} = 2(t-1+e^{2t})$$



$$f'(t) = 0 \text{에서} \quad e^{2t} = -t + 1$$

이 방정식의 해는 곡선 $y = e^{2t}$ 과 직선 $y = -t + 1$ 의 교점의 t 좌표와 같으므로 오른쪽 그림에서

$$t = 0$$

따라서 함수 $f(t)$ 의 증감표는 오른쪽과 같으므로 $f(t)$ 의 최소값은

$$f(0) = 2$$

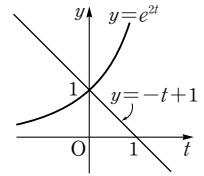
즉, $\overline{CP} = \sqrt{2}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\overline{PQ} \geq \overline{CP} - \frac{1}{a} \geq \sqrt{2} - \frac{1}{a}$$

$$\text{즉, } \sqrt{2} - \frac{1}{a} = \sqrt{b} - \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$a = 5, b = 2$$

$$\therefore a + b = 7$$



t	...	0	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	↘	2	↗

0648 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\tan \theta$ 의 값이 최대

일때 θ 의 값도 최대가 된다.

안내판의 아래끝을 바라본 각의 크기를 α , 사람과 안내판 사이의 거리를 x 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{3}{x}, \tan(\theta + \alpha) = \frac{5}{x}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\theta + \alpha - \alpha)$$

$$= \frac{\tan(\theta + \alpha) - \tan \alpha}{1 + \tan(\theta + \alpha) \tan \alpha} = \frac{\frac{5}{x} - \frac{3}{x}}{1 + \frac{5}{x} \cdot \frac{3}{x}} = \frac{2x}{x^2 + 15}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 15} \quad (x > 0) \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 15) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 15)^2} = \frac{2(15 - x^2)}{(x^2 + 15)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = \sqrt{15} \quad (\because x > 0)$$

x	(0)	...	$\sqrt{15}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$, 즉 $\tan \theta$ 는 $x = \sqrt{15}$ 에서 극대이며 최대이므로 안내판으로부터 $\sqrt{15}$ m 전방에 있을 때 안내판이 가장 잘 보인다. 답 ②

$$\textbf{0649} \quad f'(x) = 1 + a \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad 1 + a \cos x = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

[30% 배점]

$\textcircled{1}$ 의 한 근을 α ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)라 하면 다른 한 근은 $2\pi - \alpha$ 이므로 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	...	α	...	$2\pi - \alpha$	...	(2π)
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

그런데 $f(x)$ 의 극소값이 0이므로

$$f(2\pi - \alpha) = (2\pi - \alpha) + a \sin(2\pi - \alpha) = 0$$

$$2\pi - \alpha - a \sin \alpha = 0$$

$$\therefore \alpha + a \sin \alpha = 2\pi$$

[50% 배점]

따라서 구하는 $f(x)$ 의 극대값은

$$f(\alpha) = \alpha + a \sin \alpha = 2\pi$$

[20% 배점]

답 2π

$$0650 \quad f'(x) = -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$= -2e^{-x} \sin x$$

$$f''(x) = 2e^{-x} \sin x - 2e^{-x} \cos x$$

$$= 2e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

[30% 배점]

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sin x = 0$$

$$\therefore x = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(i) $n=2m-1$ ($m=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$f''(x) = f''((2m-1)\pi) > 0$$

이므로 $f(x)$ 가 극소값을 가진다.

[20% 배점]

(ii) $n=2m$ ($m=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$f''(x) = f''(2m\pi) < 0$$

이므로 $f(x)$ 가 극대값을 가진다.

[20% 배점]

(i), (ii)에서 $x_{20} = 40\pi$, $x_{10} = 20\pi$

$$x_{20} - x_{10} = 40\pi - 20\pi = 20\pi$$

$$\therefore k = 20$$

[30% 배점]

답 20

0651 $S = -k \{ p \ln p + (1-p) \ln (1-p) \}$ 에서 $0 < p < 1$ 이고

$$\frac{dS}{dp} = -k \left\{ \ln p + p \cdot \frac{1}{p} - \ln (1-p) - (1-p) \cdot \frac{1}{1-p} \right\}$$

$$= -k \{ \ln p - \ln (1-p) \}$$

$$= -k \ln \frac{p}{1-p}$$

[40% 배점]

$$\frac{dS}{dp} = 0 \text{에서} \quad \frac{p}{1-p} = 1 \quad \therefore p = \frac{1}{2}$$

p	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$\frac{dS}{dp}$		+	0	-	
S		↗	극대	↘	

따라서 S 는 $p = \frac{1}{2}$ 에서 극대이며 최대이다.

[60% 배점]

답 $\frac{1}{2}$

III. 미분법

06 도함수의 활용 (3)

$$0652 \quad y' = x^2 - 4x, \quad y'' = 2x - 4 = 2(x-2)$$

이므로 $x < 2$ 일 때 $y'' < 0$, $x > 2$ 일 때 $y'' > 0$

따라서 주어진 곡선은 $x < 2$ 일 때 위로 볼록하고, $x > 2$ 일 때 아래로 볼록하다. ... 답

$$0653 \quad y' = -4x^3 + 3x^2 + 6x + 1$$

$$y'' = -12x^2 + 6x + 6 = -6(2x^2 - x - 1)$$

$$= -6(2x+1)(x-1)$$

이므로

$$x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 1 \text{일 때 } y'' < 0, \quad -\frac{1}{2} < x < 1 \text{일 때 } y'' > 0$$

따라서 주어진 곡선은 $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 1$ 일 때 위로 볼록하고,

$-\frac{1}{2} < x < 1$ 일 때 아래로 볼록하다. ... 답

$$0654 \quad y' = 1 + \sin x, \quad y'' = \cos x \text{이므로 } 0 < x < \pi \text{에서}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{일 때 } y'' > 0, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{일 때 } y'' < 0$$

따라서 주어진 곡선은 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때 아래로 볼록하고,

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 일 때 위로 볼록하다. ... 답

$$0655 \quad y' = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1+2x)$$

$$y'' = 2e^{2x}(1+2x) + 2e^{2x} = 4e^{2x}(x+1)$$

이므로 $x < -1$ 일 때 $y'' < 0$, $x > -1$ 일 때 $y'' > 0$

따라서 주어진 곡선은 $x < -1$ 일 때 위로 볼록하고, $x > -1$ 일 때 아래로 볼록하다. ... 답

$$0656 \quad y = x - \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고} \quad y' = 1 - \frac{1}{x}, \quad y'' = \frac{1}{x^2}$$

이므로 $x > 0$ 일 때 $y'' > 0$ 이다.

따라서 주어진 곡선은 아래로 볼록하다. ... 답

$$0657 \quad y' = 3x^2 - 6x, \quad y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \text{에서} \quad x = 1$$

$$x < 1 \text{일 때 } y'' < 0, \quad x > 1 \text{일 때 } y'' > 0$$

따라서 $x=1$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 (1, 0)이다. ... 답 (1, 0)

$$0658 \quad y' = -4x^3 + 12x + 3$$

$$y'' = -12x^2 + 12 = -12(x^2 - 1) = -12(x+1)(x-1)$$

$y''=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x < -1$ 또는 $x > 1$ 일 때 $y'' < 0$, $-1 < x < 1$ 일 때 $y'' > 0$
따라서 $x=-1$, $x=1$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(-1, 2)$, $(1, 8)$ 이다. 답 $(-1, 2)$, $(1, 8)$

$$\begin{aligned} 0659 \quad y' &= \frac{-4x}{(x^2+2)^2} \\ y'' &= \frac{-4(x^2+2)^2 + 4x \cdot 2(x^2+2) \cdot 2x}{(x^2+2)^4} = \frac{4(3x^2-2)}{(x^2+2)^3} \end{aligned}$$

$$y''=0 \text{에서 } x^2=\frac{2}{3} \text{이므로 } x=-\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x < -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 또는 } x > \frac{\sqrt{6}}{3} \text{일 때 } y'' > 0,$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{3} < x < \frac{\sqrt{6}}{3} \text{일 때 } y'' < 0$$

따라서 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로

변곡점은 $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{3}{4})$ 이다.

$$\text{답 } (-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{3}{4}), (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{3}{4})$$

$$\begin{aligned} 0660 \quad y' &= 2x - \frac{1}{x^2} \\ y'' &= 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3} = \frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3} \end{aligned}$$

$$y''=0 \text{에서 } x=-1 (\because x^2-x+1 > 0)$$

$$x < -1 \text{일 때 } y'' > 0, -1 < x < 0 \text{일 때 } y'' < 0$$

따라서 $x=-1$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(-1, 0)$ 이다. 답 $(-1, 0)$

$$0661 \quad y' = 2 \cos 2x, y'' = -4 \sin 2x$$

$$y''=0 \text{에서 } 2x=\pi (\because 0 < x < \pi) \quad \therefore x=\frac{\pi}{2}$$

$$x < \frac{\pi}{2} \text{일 때 } y'' < 0, x > \frac{\pi}{2} \text{일 때 } y'' > 0$$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점은

$$(\frac{\pi}{2}, 0) \text{이다.} \quad \text{답 } (\frac{\pi}{2}, 0)$$

$$\begin{aligned} 0662 \quad y' &= 2x - 4 \sin x \\ y'' &= 2 - 4 \cos x = 2(1 - 2 \cos x) \end{aligned}$$

$$y''=0 \text{에서 } \cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} (\because 0 < x < \pi)$$

$$x < \frac{\pi}{3} \text{일 때 } y'' < 0, x > \frac{\pi}{3} \text{일 때 } y'' > 0$$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점은

$$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{9} + 2) \text{이다.} \quad \text{답 } (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^2}{9} + 2)$$

$$\begin{aligned} 0663 \quad y' &= e^x + xe^x = e^x(1+x) \\ y'' &= e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x) \end{aligned}$$

$$y''=0 \text{에서 } x=-2$$

$$x < -2 \text{일 때 } y'' < 0, x > -2 \text{일 때 } y'' > 0$$

따라서 $x=-2$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점은

$$(-2, -\frac{2}{e^2}) \text{이다.} \quad \text{답 } (-2, -\frac{2}{e^2})$$

$$\begin{aligned} 0664 \quad y' &= \frac{2x}{x^2+1} \\ y'' &= \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$y''=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 1 \text{일 때 } y'' < 0$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때 } y'' > 0$$

따라서 $x=-1$, $x=1$ 의 좌우에서 y'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$ 이다. 답 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$

$$\begin{aligned} 0665 \quad f'(x) &= -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3) \\ f''(x) &= -12x^2 + 24x = -12x(x-2) \end{aligned}$$

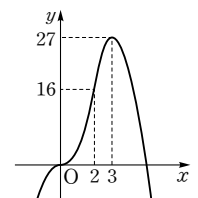
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	0	...	2	...	3	...
$f'(x)$	+	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	0	+	0	-	-	-
$f(x)$	$\curvearrowright$	0	$\nearrow$	16	$\curvearrowright$	27	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



$$\begin{aligned} 0666 \quad f'(x) &= 4x^3 - 12x + 8 \\ &= 4(x^3 - 3x + 2) \\ &= 4(x-1)^2(x+2) \\ f''(x) &= 12x^2 - 12 = 12(x^2-1) = 12(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

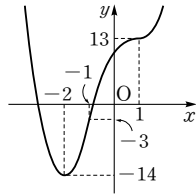
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	-2	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-14	$\nearrow$	-3	$\curvearrowright$	13	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0667 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

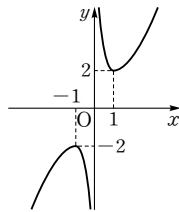
$f''(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	...	-1	...	(0)	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	-	-		+	+	+
$f(x)$	↖	-2	↘		↘	2	↗

이 때, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



$$\begin{aligned} 0668 \quad f'(x) &= \frac{3(x^2+1) - 3x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-6x(x^2+1)^2 - (-3x^2+3) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{6x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$f''(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = -\sqrt{3}$ 또는 $x = \sqrt{3}$

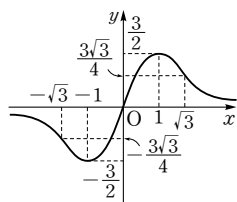
x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘

이 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0669 $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$ 이고

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{\sqrt{4-x^2}} \\ f''(x) &= \frac{-4x\sqrt{4-x^2} - (4-2x^2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} \\ &= \frac{-4x(4-x^2) + x(4-2x^2)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2x^3-12x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

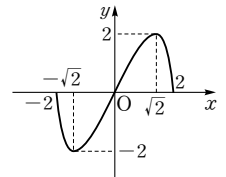
$f'(x) = 0$ 에서 $x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = \sqrt{2}$

$f''(x) = 0$ 에서 $x = 0$ ($\because -2 \leq x \leq 2$)

x	-2	...	$-\sqrt{2}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	+	+	0	-	
$f''(x)$		+	+	+	0	-	-	-	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0670 $f'(x) = 1 + \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = -1 \quad \therefore x = \pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$

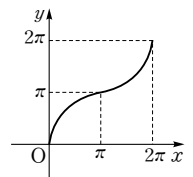
$f''(x) = 0$ 에서 $\sin x = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = 2\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$

x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		+	0	+	
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↖	π	↗	2π

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0671 $f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$f''(x) = 2 \cos 2x$$

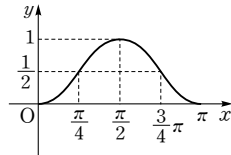
$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \pi$ ($\because 0 \leq x \leq \pi$)

$f''(x) = 0$ 에서 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{4}\pi$ ($\because 0 \leq x \leq \pi$)

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	+	+	0	-	-	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



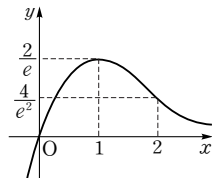
0672 $f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} = 2e^{-x}(1-x)$
 $f''(x) = -2e^{-x}(1-x) + 2e^{-x} \cdot (-1) = 2e^{-x}(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$
 $f''(x)=0$ 에서 $x=2$

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{4}{e^2}$	↘

이 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0673 $f(x) = 2x \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고
 $f'(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2$
 $f''(x) = \frac{2}{x}$

$f'(x)=0$ 에서 $\ln x = -1$

$\therefore x = \frac{1}{e}$

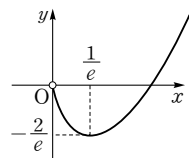
$f''(x)=0$ 을 만족하는 x 의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$		↘	$-\frac{2}{e}$	↗

이 때, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이

므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



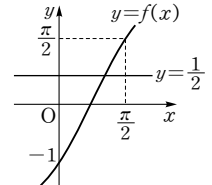
0674 방정식 $x - \cos x = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = x - \cos x$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = x - \cos x$ 로 놓으면 $f'(x) = 1 + \sin x$
 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 구간에서 증가한다.

이 때, $f(0) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ 이므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 $x - \cos x = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 1이다.



답 1

0675 방정식 $x - \ln x = 3$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = x - \ln x$ 와 직선 $y = 3$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = x - \ln x$ 로 놓으면 $x > 0$ 이고

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

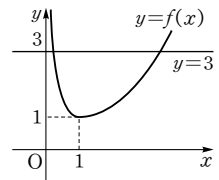
$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	1	↗

또, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 $x - \ln x = 3$ 의 실근의 개수는 2이다.



답 2

0676 방정식 $e^x - x = 0$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = e^x - x$ 와 직선 $y = 0$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = e^x - x$ 로 놓으면 $f'(x) = e^x - 1$

$f'(x)=0$ 에서 $e^x = 1$

$\therefore x = 0$

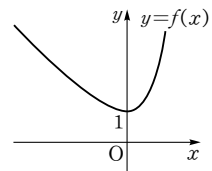
이 때, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 $e^x - x = 0$ 의 실근의 개수는 0이다.

답 0

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↗



0677 $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ 으로 놓으면

$f'(x) = -\sin x + x$

$x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x > 0$ 에서 증가한다.

그런데 $f(0)=0$ 이므로 $x>0$ 일 때 $f(x)>0$, 즉 $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$ 이다.

$$\therefore \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \cdots \text{증명 끝}$$

0678 $f(x)=e^{-x}-1+x$ 로 놓으면

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$x>0$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x>0$ 에서 증가한다.
그런데 $f(0)=0$ 이므로 $x>0$ 일 때 $f(x)>0$, 즉 $e^{-x}-1+x>0$ 이다.

$$\therefore e^{-x} > 1 - x \quad \cdots \text{증명 끝}$$

0679 $f(x)=x-1-\ln x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$x>1$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x>1$ 에서 증가한다.
그런데 $f(1)=0$ 이므로 $x>1$ 일 때 $f(x)>0$, 즉 $x-1-\ln x > 0$ 이다.

$$\therefore x-1 > \ln x \quad \cdots \text{증명 끝}$$

0680 $v = \frac{dx}{dt} = 2e^{-2t}$ 이므로 $t=0$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = 2 \cdot 1 = 2$$

답 2

0681 $v = \frac{dx}{dt} = e^t - 2$ 이므로 $t=0$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = 1 - 2 = -1$$

답 -1

0682 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \cos t - 1, \quad a = \frac{dv}{dt} = -\sin t$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 가속도는 $a = -1$

답 -1

0683 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 2 \sin t, \quad a = \frac{dv}{dt} = 2 - 2 \cos t$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 가속도는 $a = 2$

답 2

0684 시각 t 에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v = \frac{dx}{dt} = \cos t - \sin t, \quad a = \frac{dv}{dt} = -\sin t - \cos t$$

따라서 $t = \pi$ 에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v = -1, \quad a = 1$$

답 $v = -1, a = 1$

0685 $\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 2t$ 이므로 t 초 후의 속도는 $\vec{v} = (2, 2t)$

따라서 $t=2$ 에서의 속도는 $\vec{v} = (2, 2 \cdot 2) = (2, 4) \quad \cdots$ 답

0686 $\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t$ 이므로 t 초 후의 속도는

$$\vec{v} = (-\sin t, \cos t)$$

따라서 $t=2$ 에서의 속도는 $\vec{v} = (-\sin 2, \cos 2) \quad \cdots$ 답

0687 $\frac{dx}{dt} = \cos t, \frac{dy}{dt} = -2 \sin 2t$ 이므로 t 초 후의 속도를 $\vec{v}$ 라

하면 $\vec{v} = (\cos t, -2 \sin 2t)$

따라서 $t = \pi$ 일 때 $\vec{v} = (-1, 0)$ 이므로 속력은

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

답 1

0688 $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \frac{dy}{dt} = 1 - \sin t$ 에서

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\cos t$$

이므로 t 초 후의 가속도는 $\vec{a} = (\sin t, -\cos t)$

따라서 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서의 가속도와 가속도의 크기는

$$\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2} = 1$$

$$\text{답 } \vec{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), |\vec{a}| = 1$$

0689 $y' = 2x(\ln x - 2) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x - 3)$

$$y'' = 2 \ln x - 3 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x - 1$$

곡선이 위로 볼록하려면 $y'' < 0$ 이어야 하므로

$$2 \ln x - 1 < 0, \quad \ln x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore x < e^{\frac{1}{2}}, \quad \text{즉 } x < \sqrt{e}$$

그런데 로그의 진수 조건에서 $x > 0$ 이므로

$$0 < x < \sqrt{e}$$

답 ①

0690 $y' = 2 \cos x(-\sin x) = -\sin 2x, \quad y'' = -2 \cos 2x$

곡선이 아래로 볼록하려면 $y'' > 0$ 이어야 하므로

$$-2 \cos 2x > 0, \quad \cos 2x < 0$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 $0 \leq 2x \leq 2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

답 ③

0691 곡선의 호가 선분 AB보다 항상 아래쪽에 있으므로 곡선이 아래로 볼록이어야 한다.

$$y' = 3x^2 - 18x + 24, \quad y'' = 6x - 18$$

곡선이 아래로 볼록하려면 $y'' > 0$ 이어야 하므로

$$6x - 18 > 0 \quad \therefore x > 3$$

따라서 $a \geq 3$ 이므로 a 의 최소값은 3이다.

답 ③

0692 $f'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{4x}{x^2+1}$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)-4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
 $x < -1$ 또는 $x > 1$ 일 때 $f''(x) < 0$
 $-1 < x < 1$ 일 때 $f''(x) > 0$

$x=-1$, $x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(-1, \ln 4)$, $(1, \ln 4)$ 이다.
 따라서 두 변곡점 사이의 거리는
 $1 - (-1) = 2$

답 2

0693 $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

$$f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - (2x-x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2-4x+x^2}{e^x}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x^2-4x+2=0 \quad \therefore x=2 \pm \sqrt{2}$
 $x < 2-\sqrt{2}$ 또는 $x > 2+\sqrt{2}$ 일 때 $f''(x) > 0$
 $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$ 일 때 $f''(x) < 0$
 따라서 $x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표의 합은
 $(2-\sqrt{2}) + (2+\sqrt{2}) = 4$

답 4

0694 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 로 놓으면 $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x)=0$ 에서 $3x^2-1=0, \quad x^2=\frac{1}{3}$

$$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } x > \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 일 때 } f''(x) > 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 일 때 } f''(x) < 0$$

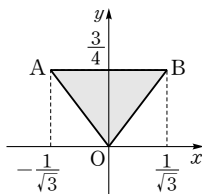
$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변

곡점은 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ 이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 ①



0695 $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=2$
 $x < 2$ 일 때 $f''(x) < 0$, $x > 2$ 일 때 $f''(x) > 0$

$x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(2, \frac{2}{e^2})$ 이

다. $f'(2) = -\frac{1}{e^2}$ 이므로 변곡점 $(2, \frac{2}{e^2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x-2) \quad \therefore y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$$

따라서 $g(x) = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$ 이므로

$$g(2) = -\frac{1}{e^2} \cdot 2 + \frac{4}{e^2} = \frac{2}{e^2}$$

답 $\frac{2}{e^2}$

0696 $f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x}, f''(x) = 2a + \frac{1}{x^2}$

$x=1$ 에서 극대이므로 $f'(1) = 2a + b - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

변곡점의 x 좌표가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2a + 4 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $-4 + b - 1 = 0 \quad \therefore b = 5$

$$\therefore f(x) = -2x^2 + 5x - \ln x$$

$$f'(x) = -4x + 5 - \frac{1}{x} = \frac{-4x^2 + 5x - 1}{x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $4x^2 - 5x + 1 = 0$

$$(4x-1)(x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 1$$

x	(0)	...	$\frac{1}{4}$	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{9}{8} + \ln 4$	$\nearrow$	3	$\searrow$

따라서 $f(x)$ 의 극소값은 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8} + \ln 4$

답 ①

0697 $f'(x) = a \cos x - b \sin x + c$

$$f''(x) = -a \sin x - b \cos x$$

$x = \frac{4}{3}\pi$ 에서 극대이므로

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad [40\% \text{ 배점}]$$

변곡점의 좌표가 $(\pi, -\pi)$ 이므로 $f(\pi) = -\pi, f''(\pi) = 0$

$$-b + c\pi = -\pi, b = 0 \quad \therefore b = 0, c = -1 \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$b=0, c=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-\frac{1}{2}a - 1 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore a + b + c = -2 + 0 - 1 = -3$$

[30% 배점] 답 -3

0698 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$

점 $(0, -\frac{2}{3})$ 가 $f(x)$ 의 변곡점이므로

$$f(0) = -\frac{2}{3}, f''(0) = 0 \quad \therefore d = -\frac{2}{3}, b = 0$$

또, $x=0$ 인 점에서의 접선의 기울기가 $\tan 45^\circ=1$ 이므로

$$f'(0)=c=1$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축과의 접점을 $(t, 0)$ 이라 하면

$$f(t)=at^3+t-\frac{2}{3}=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(t)=3at^2+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡에서 $at^2=-\frac{1}{3}$ 이므로 ㉠에 대입하면

$$-\frac{1}{3}t+t-\frac{2}{3}=0 \quad \therefore t=1$$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=-\frac{1}{3}$

$$\therefore a+b+c+d=-\frac{1}{3}+0+1-\frac{2}{3}=0 \quad \text{답 ㉢}$$

0699 구간 $[a, f]$ 에서 $f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.

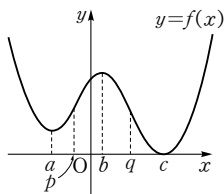
x	a	$\dots$	b	$\dots$	c	$\dots$	d	$\dots$	e	$\dots$	f
$f''(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 모양이 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$ 이어야 하므로 구하는 구간은 (b, d) 이다. 답 ㉢

0700 방정식 $f'(x)f''(x)=0$ 에서

$$f'(x)=0 \text{ 또는 } f''(x)=0$$

오른쪽 그림과 같이 극대 또는 극소가 되는 점의 x 좌표를 a, b, c , 변곡점의 x 좌표를 p, q 라 하자.



(i) $f'(x)=0$ 을 만족하는 x 의 값은

$$x=a \text{ 또는 } x=b \text{ 또는 } x=c$$

(ii) $f''(x)=0$ 을 만족하는 x 의 값은

$$x=p \text{ 또는 } x=q$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족하는 서로 다른 실근의 개수는 5이다. 답 5

0701 점 A, B, ..., G의 x 좌표를 각각 $a, b, \dots, g$ 라 하고 $f'(x), f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	b	c	d	e	f	g
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-

따라서 부등식 $f'(x)f''(x)<0$ 을 만족하는 점은 A, E이다. 답 ㉠

0702 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1-\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 1-\ln x=0 \quad \therefore x=e$$

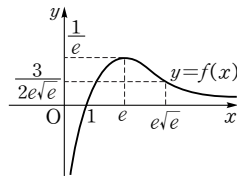
$$f''(x)=0 \text{에서 } 2\ln x - 3=0 \quad \therefore x=e\sqrt{e}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	$\dots$	e	$\dots$	$e\sqrt{e}$	$\dots$
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$		$\curvearrowright$	$\frac{1}{e}$	$\curvearrowleft$	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	$\curvearrowright$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{이므로 } y=f(x)$$



의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 치역은 $\{y \mid y \leq \frac{1}{e}\}$ 이다.

ㄴ. 점근선의 방정식은 x 축, y 축, 즉 $y=0, x=0$ 이다.

ㄷ. $f(1)=0, f(e)=\frac{1}{e}$ 이므로 두 점 A, B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

이 때, $x \leq e\sqrt{e}$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록한 모양이므로 $\overline{AB}$ 는 $y=f(x)$ 의 그래프의 아래쪽에 있다.

즉, $\overline{AB}$ 는 부등식 $y \leq f(x)$ 가 나타내는 영역에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㉢

$$\begin{aligned} \text{0703 } f'(x) &= \frac{(x^2+1)-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

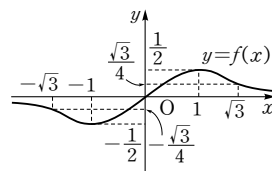
$$f''(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

x	$\dots$	$-\sqrt{3}$	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{3}$	$\dots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\curvearrowright$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\curvearrowleft$	$-\frac{1}{2}$	$\curvearrowright$	0	$\curvearrowleft$	$\frac{1}{2}$	$\curvearrowright$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\curvearrowleft$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0 \text{이므로 } y=f(x)$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $f(x)$ 의 최대값은 $f(1)=\frac{1}{2}$, 최소값은 $f(-1)=-\frac{1}{2}$ 이다.

ㄷ. $x \geq \sqrt{3}$ 일 때 $f''(x) \geq 0$ 이므로 구간 (e, e^2) 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0704 $f'(x) = -4xe^{-2x^2}$

$$f''(x) = -4e^{-2x^2} + (-4x) \cdot (-4xe^{-2x^2}) = 4e^{-2x^2}(4x^2-1) = 4e^{-2x^2}(2x+1)(2x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\curvearrowright$	1	$\curvearrowleft$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

또, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x^2} = 0$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = e^{-2(-x)^2} = e^{-2x^2} = f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 치역은 $\{y | 0 < y \leq 1\}$ 이다.

ㄷ. 변곡점은 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0705 $\ln x - x + 15 - n = 0$ 에서

$$\ln x - x + 15 = n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\ln x - x + 15$ 와 직선 $y=n$ 이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = \ln x - x + 15 \text{로 놓으면 } f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 이므로 함수

$f(x)$ 의 증감표는 오른쪽과 같다.

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty \text{이므로}$$

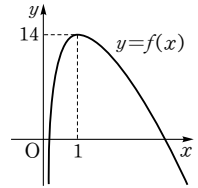
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

x	(0)	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	14	$\searrow$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=n$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 n 의 값의 범위는

$$1 \leq n < 14$$

이므로 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 13의 13개이다.



답 13

0706 방정식 $e^x + e^{-x} = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x + e^{-x}$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

[30% 배점]

$f(x) = e^x + e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x - e^{-x} = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $e^{2x}=1$, 즉 $x=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증감표는 오른쪽과 같다.

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

[50% 배점]

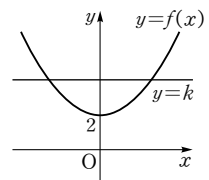
따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$k > 2$$

[20% 배점]

$$\text{답 } k > 2$$

x	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$



0707 방정식 $x\sqrt{6-x} = a$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x\sqrt{6-x}$ 와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = x\sqrt{6-x} \text{로 놓으면 } x \leq 6$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{6-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} \\ &= \frac{2(6-x) - x}{2\sqrt{6-x}} \\ &= \frac{3(4-x)}{2\sqrt{6-x}} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=4$$

x	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$f'(x)$	+	0	−	
$f(x)$	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	0

또, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 $y=f(x)$

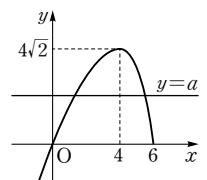
의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a < 4\sqrt{2}$$

이므로 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개이다.

답 6



0708 $x+2\sin x-k=0$ 에서 $x+2\sin x=k$ ㉠
 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x+2\sin x$ 와
 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x+2\sin x$ 로 놓으면 $f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0\leq x\leq 2\pi$)

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	↗	2π

이 때, $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와
 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서
 만나려면

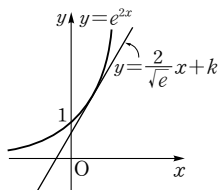
$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}<k<\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

따라서 α 의 최소값과 β 의 최대값의

합은 $\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\right)=2\pi$

답 ⑤

0709 방정식 $e^{2x}=\frac{2}{\sqrt{e}}x+k$ 가 오직 하
 나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같
 이 곡선 $y=e^{2x}$ 과 직선 $y=\frac{2}{\sqrt{e}}x+k$ 가
 접해야 한다. $f(x)=e^{2x}$,



$g(x)=\frac{2}{\sqrt{e}}x+k$ 로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}$, $g'(x)=\frac{2}{\sqrt{e}}$

접점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t)=g(t)$ 에서 $e^{2t}=\frac{2}{\sqrt{e}}t+k$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$ 에서 $2e^{2t}=\frac{2}{\sqrt{e}}$ ㉡

㉡에서 $e^{2t}=e^{-\frac{1}{2}}$, $2t=-\frac{1}{2}$ $\therefore t=-\frac{1}{4}$

$t=-\frac{1}{4}$ 을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{1}{2\sqrt{e}}+k$

$\therefore k=\frac{3}{2\sqrt{e}}$

답 ②

다른 풀이 $e^{2x}=\frac{2}{\sqrt{e}}x+k$ 에서 $e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}x=k$ ㉠

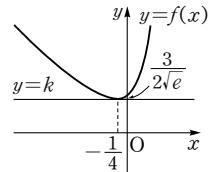
방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가지면 곡선 $y=e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}x$ 와

직선 $y=k$ 가 한 점에서 만난다. $f(x)=e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}x$ 로 놓으면

$f'(x)=2e^{2x}-\frac{2}{\sqrt{e}}=2(e^{2x}-e^{-\frac{1}{2}})$

$f'(x)=0$ 에서 $e^{2x}-e^{-\frac{1}{2}}=0$ $\therefore x=-\frac{1}{4}$

x	...	$-\frac{1}{4}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$\frac{3}{2\sqrt{e}}$	↗



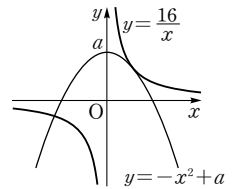
따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$
 와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만날 때의 k 의 값은

$k=\frac{3}{2\sqrt{e}}$

0710 방정식 $\frac{16}{x}=-x^2+a$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 두

곡선 $y=\frac{16}{x}$, $y=-x^2+a$ 가 서로 다

른 두 점에서 만나야 한다. 그런데
 $x<0$ 일 때 한 점에서 만나므로 오른쪽
 그림과 같이 두 곡선이 제1사분면에
 서 접해야 한다. [40% 배점]



$f(x)=\frac{16}{x}$, $g(x)=-x^2+a$ 로 놓으면

$f'(x)=-\frac{16}{x^2}$, $g'(x)=-2x$

접점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t)=g(t)$ 에서 $\frac{16}{t}=-t^2+a$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$ 에서 $-\frac{16}{t^2}=-2t$ ㉡ [40% 배점]

㉡에서 $t^3=8$, 즉 $t=2$ 이므로 ㉠에 대입하면

$8=-4+a$ $\therefore a=12$

[20% 배점]

답 12

0711 방정식 $\ln x=ax^2$ 이 서로 다른 두
 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두
 곡선 $y=\ln x$, $y=ax^2$ 이 서로 다른 두
 점에서 만나야 하므로 $a>0$

$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax^2$ 으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=2ax$

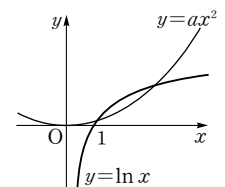
두 곡선이 접할 때 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t)=g(t)$ 에서 $\ln t=at^2$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$ 에서 $\frac{1}{t}=2at$ ㉡

㉡에서 $a=\frac{1}{2t^2}$ 이므로 ㉠에 대입하면

$\ln t=\frac{1}{2}$ $\therefore t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$, $a=\frac{1}{2e}$



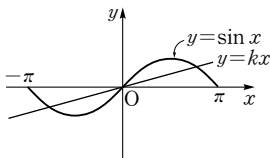
따라서 방정식 $\ln x = \frac{1}{2e}x^2$ 이 중근을 가지므로 방정식 $\ln x = ax^2$

이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$0 < a < \frac{1}{2e}$$

답 $0 < a < \frac{1}{2e}$

0712 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 방정식 $\sin x = kx$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



$y = \sin x$ 에서 $y' = \cos x$ 이므로 곡선 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 0 = \cos 0 \cdot (x - 0) \quad \therefore y = x$$

따라서 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만나려면

$$0 \leq k < 1$$

이므로 a 의 최대값은 1이다.

답 ②

0713 주어진 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않으므로 직선 $y = kx$ 가 두 곡선 $y = e^x$, $y = \ln x$ 와 모두 만나지 않아야 한다.

(i) 직선 $y = kx$ 가 $y = e^x$ 과 접하는 경우

$y = e^x$ 에서 $y' = e^x$ 이므로 곡선 $y = e^x$ 위의 점 (t, e^t) 에서의 접선의 방정식은 $y - e^t = e^t(x - t)$

이 직선이 원점을 지나므로 $-e^t = e^t \cdot (-t)$

$$t = 1 \quad \therefore k = e$$

(ii) 직선 $y = kx$ 가 $y = \ln x$ 와 접하는 경우

$y = \ln x$ 에서 $y' = \frac{1}{x}$ 이므로 $y = \ln x$ 위의 점 $(s, \ln s)$ 에서의

접선의 방정식은 $y - \ln s = \frac{1}{s}(x - s)$

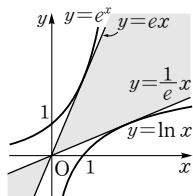
이 직선이 원점을 지나므로 $-\ln s = \frac{1}{s} \cdot (-s)$

$$s = e \quad \therefore k = \frac{1}{e}$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{e} < k < e$$

답 ③



0714 $f'(x) = ax + 3 \cos x + 1$, $f''(x) = a - 3 \sin x$

곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x) = 0$ 에서 $a - 3 \sin x = 0$

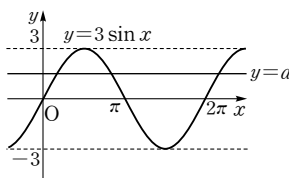
$$\therefore 3 \sin x = a$$

이 방정식이 실근을 가지려면

곡선 $y = 3 \sin x$ 와 직선 $y = a$ 가

만나야 하므로 오른쪽 그림에서

$$-3 \leq a \leq 3$$



이 때, $a = -3$ 또는 $a = 3$ 이면

$$f''(x) = -3(1 + \sin x) \text{ 또는 } f''(x) = 3(1 - \sin x)$$

$$\therefore f''(x) \leq 0 \text{ 또는 } f''(x) \geq 0$$

따라서 $f''(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

$$\therefore -3 < a < 3$$

답 ③

0715 $f'(x) = a \cos x - 2x$, $f''(x) = -a \sin x - 2$

곡선 $y = f(x)$ 가 $0 < x < 2\pi$ 에서 두 개의 변곡점을 가지므로 방정식 $f''(x) = 0$ 이 $0 < x < 2\pi$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x) = 0$ 에서 $a \sin x = -2$

$$\therefore \sin x = -\frac{2}{a}$$

이 방정식이 $0 < x < 2\pi$ 에서 서로

다른 두 실근을 가지려면 오른쪽

그림과 같이 곡선 $y = \sin x$ 와 직

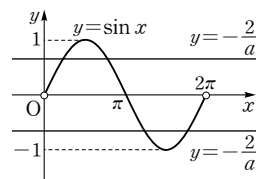
선 $y = -\frac{2}{a}$ 가 서로 다른 두 점에

서 만나야 하므로

$$0 < -\frac{2}{a} < 1 \text{ 또는 } -1 < -\frac{2}{a} < 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

답 ①



0716 $f'(x) = 6x - a \sin x$, $f''(x) = 6 - a \cos x$

주어진 곡선이 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않거나 $f''(x) = 0$ 의 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f''(x) = 0$ 에서 $6 - a \cos x = 0$

$$\therefore \cos x = \frac{6}{a}$$

..... ㉠

(i) 방정식 ㉠이 실근을 갖지 않으

려면 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y = \cos x$ 와 직선 $y = \frac{6}{a}$ 이 만나

지 않아야 하므로

$$\frac{6}{a} < -1 \text{ 또는 } \frac{6}{a} > 1$$

$$\therefore -6 < a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 6$$

(ii) $a = -6$ 또는 $a = 6$ 이면

$$f''(x) = 6(1 + \cos x) \text{ 또는 } f''(x) = 6(1 - \cos x)$$

$$\therefore f''(x) \geq 0$$

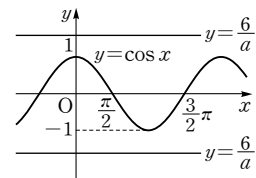
따라서 $f''(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 변곡점을 갖지 않도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-6 \leq a < 0, 0 < a \leq 6$$

이므로 정수 a 의 값은 $-6, -5, \dots, -1, 1, \dots, 5, 6$ 의 12개 이다.

답 12



0717 $f(x) = \sin 2x - 2 \sin x$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 주기가 2π 인 주기함수이므로 구간 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $f(x) \leq a$ 를 만족하는 a 의 값을 구하면 된다.

$$f'(x) = 2 \cos 2x - 2 \cos x = 2(2 \cos^2 x - 1) - 2 \cos x \\ = 2(2 \cos^2 x - \cos x - 1) = 2(2 \cos x + 1)(\cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = 2\pi$$

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

따라서 $f(x)$ 의 최대값은 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $f(x) \leq a$ 가 성립

$$\text{하려면} \quad a \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{답 } a \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

0718 $x \ln x - 3x + 2 + k \leq 0$ 에서 $3x - x \ln x - 2 \geq k$
 $f(x) = 3x - x \ln x - 2$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 - \ln x \quad [40\% \text{ 배점}]$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \ln x = 2 \quad \therefore x = e^2$$

x	e	...	e^2	...	e^3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$2e-2$	$\nearrow$	e^2-2	$\searrow$	-2

[40% 배점]

따라서 $f(x)$ 의 최소값은 $f(e^3) = -2$ 이므로 $e \leq x \leq e^3$ 에서

$$f(x) \geq k \text{가 성립하려면} \quad k \leq -2 \quad [20\% \text{ 배점}] \quad \text{답 } k \leq -2$$

0719 $(\ln x)^2 \geq \ln x + a$ 에서 $(\ln x)^2 - \ln x \geq a$
 $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x - 1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \ln x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

x	(0)	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

위의 표에서 $f(x)$ 의 최소값은 $f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{4}$ 이므로 $x > 0$ 인 모든

$$\text{실수 } x \text{에 대하여 } f(x) \geq a \text{가 성립하려면} \quad a \leq -\frac{1}{4}$$

따라서 a 의 최대값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

답 ②

0720 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 인 모든 실수 x 에 대하여

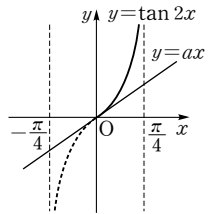
부등식 $\tan 2x > ax$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \tan 2x$ 가 직선 $y = ax$ 보다 위쪽에 있어야 한다.

$f(x) = \tan 2x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2 \sec^2 2x$$

$y = ax$ 가 원점을 지나는 직선이므로,

$$f'(0) = 2 \text{이므로} \quad a \leq 2$$



답 ①

0721 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x} \geq 2k \ln x$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 가 곡선 $y = 2k \ln x$ 보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2k \ln x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x) = \frac{2k}{x}$$

두 곡선이 접할 때 접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서} \quad \sqrt{t} = 2k \ln t \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서} \quad \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2k}{t} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡에서 $k = \frac{\sqrt{t}}{4}$ 이므로 ㉠에 대입하면

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln t, \quad \ln t = 2$$

$$\therefore t = e^2, \quad k = \frac{e}{4}$$

따라서 $0 < k \leq \frac{e}{4}$ 이므로 k 의 최대값은 $\frac{e}{4}$ 이다.

답 ①

0722 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -\pi a \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

이므로 $t = 2$ 에서의 속도는

$$v = -\pi a \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}a$$

$$\frac{\pi}{2}a = 2\sqrt{3} \text{에서} \quad a = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$$

따라서 $t = 2$ 에서의 점 P의 위치는

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{\pi}$$

답 ⑤

0723 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3 - \frac{4}{t}$$

$$v = 2 \text{에서} \quad 3 - \frac{4}{t} = 2, \quad \frac{4}{t} = 1 \quad \therefore t = 4$$

따라서 $t = 4$ 에서의 점 P의 위치는

$$x = 12 - 4 \ln 4 = 12 - 8 \ln 2$$

답 ⑤

0724 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -2\sqrt{3}\sin 2t - 2\cos 2t$$

$$= -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) = -4\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \text{ 이므로 } -4 \leq -4\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 4$$

따라서 점 P의 속도의 최대값은 4이다.

답 ④

0725 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 4\cos t - 2\cos 2t - 2 = 4\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) - 2$$

$$= -4\cos^2 t + 4\cos t = -4\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \quad [60\% \text{ 배점}]$$

따라서 v 는 $\cos t = \frac{1}{2}$, 즉 $t = \frac{\pi}{3}$ 일 때 최대값 1을 가지므로

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = 1 \quad \therefore \alpha\beta = \frac{\pi}{3} \quad [40\% \text{ 배점}] \quad \text{답 } \frac{\pi}{3}$$

0726 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2 + 4}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2(t^2 + 4) - 2t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{-2(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2}$$

$$a = 0 \text{에서 } t^2 - 4 = 0, \quad (t+2)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 (\because t > 0)$$

답 2

0727 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}p\cos \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}q\sin \frac{\pi}{2}t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{4}p\sin \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi^2}{4}q\cos \frac{\pi}{2}t$$

$t=3$ 에서의 속도가 -2π 이므로

$$\frac{\pi}{2}p\cos \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}q\sin \frac{3}{2}\pi = -2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}q = -2\pi \quad \therefore q = -4$$

$t=3$ 에서의 가속도가 π^2 이므로

$$-\frac{\pi^2}{4}p\sin \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi^2}{4}q\cos \frac{3}{2}\pi = \pi^2$$

$$\frac{\pi^2}{4}p = \pi^2 \quad \therefore p = 4$$

$$\therefore p+q = 4 + (-4) = 0$$

답 ③

0728 열차가 제동을 건 지 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{ds}{dt} = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{t}$$

열차가 정지할 때 속도가 0이므로

$$6 - \frac{3}{2}\sqrt{t} = 0 \quad \therefore t = 16$$

따라서 이 열차가 16초 동안 움직인 거리는

$$s = 6 \cdot 16 - 16\sqrt{16} = 32(\text{m})$$

답 ③

0729 제동을 건 지 t 초 후의 열차의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{19.6 - 1.96t}{2\sqrt{19.6t - 0.98t^2}}$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$19.6 - 1.96t = 0 \quad \therefore t = 10 (\text{초})$$

답 ⑤

0730 t 초 후의 물체의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 8e^t - 2te^t - t^2e^t = -e^t(t^2 + 2t - 8)$$

$$= -e^t(t-2)(t+4)$$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$-e^t(t-2)(t+4) = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

따라서 최고 높이는 $t=2$ 일 때 $h = 42 + 4e^2$ 이므로 최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리는

$$42 + 4e^2 - 50 = 4(e^2 - 2)(\text{m})$$

답 ④

0731 그릇에 담긴 물의 깊이를 h , 수면의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r:h = 6:10 \quad \therefore r = \frac{3}{5}h$$

물의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{25}h^2 \cdot h = \frac{3}{25}\pi h^3$$

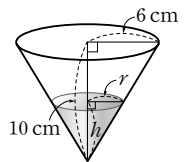
$$\text{양변을 } t \text{에 대하여 미분하면 } \frac{dV}{dt} = \frac{9}{25}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$h=5 \text{일 때 } \frac{dh}{dt} = \frac{20}{9} \text{이므로}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{25}\pi \cdot 25 \cdot \frac{20}{9} = 20\pi$$

따라서 매초 $20\pi \text{cm}^3$ 만큼의 물이 들어간다.

답 ②



0732 정삼각형의 한 변의 길이를 x , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\text{양변을 } t \text{에 대하여 미분하면 } \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\text{이 때, } \frac{dx}{dt} = 4 \text{이므로 } \frac{dS}{dt} = 2\sqrt{3}x$$

따라서 $x=15$ 일 때의 넓이의 변화율은

$$2\sqrt{3} \cdot 15 = 30\sqrt{3} (\text{cm}^2/\text{초})$$

답 ③

0733 구의 반지름의 길이를 r , 겹넓이를 S , 부피를 V 라 하면

$$S = 4\pi r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변을 } t \text{에 대하여 미분하면 } \frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\text{이 때, } \frac{dS}{dt} = 6 \text{이므로 } 6 = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{3}{4\pi r}$$

㉠의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{3}{4\pi r} = 3r$$

따라서 $r=12$ 일 때의 구의 부피의 변화율은
 $3 \cdot 12 = 36 \text{ (cm}^3/\text{초)}$

답 ⑤

0734 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h , 부피를 V 라 하면 오른쪽 그림에서 $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 10^2$ 이므로

$$r^2 = 100 - \frac{h^2}{4}$$

$$\therefore V = \pi r^2 h = \pi \left(100 - \frac{h^2}{4}\right) h = \pi \left(100h - \frac{h^3}{4}\right)$$

양변을 t 에 대하여 미분하면 $\frac{dV}{dt} = \pi \left(100 - \frac{3}{4}h^2\right) \frac{dh}{dt}$

이 때, $\frac{dh}{dt} = -1$ 이므로 $\frac{dV}{dt} = -\pi \left(100 - \frac{3}{4}h^2\right)$

따라서 $h=4$ 일 때의 부피의 변화율은

$$-\pi \left(100 - \frac{3}{4} \cdot 4^2\right) = -88\pi \text{ (cm}^3/\text{초)}$$

답 ④

0735 배에서 절벽 꼭대기까지의 거리를 x , 배에서 절벽 밑까지의 거리를 y 라 하면 $x^2 = y^2 + 10^2$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$2x \frac{dx}{dt} = 2y \frac{dy}{dt} \quad \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

이 때, $\frac{dx}{dt} = -3$ 이고, 2초 후에 $x=26-3 \cdot 2=20$ 이므로

$$y = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{20}{10\sqrt{3}} \cdot (-3) = -2\sqrt{3} \text{ (m/초)}$$

따라서 2초 후의 배의 속력은 $2\sqrt{3}$ m/초이다.

답 ③

0736 사다리의 아래 끝이 벽에서부터 떨어진 거리를 x m, 사다리 위 끝이 지면으로부터 떨어진 거리를 y m라 하면

$$x^2 + y^2 = 100$$

[20% 배점]

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

이 때, $\frac{dx}{dt} = 2$ 이고, $x=6$ 일 때 $y = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ 이므로

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8} \cdot 2 = -\frac{3}{2} \text{ (m/초)} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

따라서 사다리의 위 끝이 벽을 따라 내려오는 속력은 $\frac{3}{2}$ m/초이다.

[20% 배점] 답 $\frac{3}{2}$

0737 오른쪽 그림과 같이 관찰자의 위치를 P, 처음 자동차의 위치를 Q, t 초 후의 자동차의 위치를 R라 하고,

$\overline{PR} = s$ 로 놓으면

$$\overline{PQ} = 200, \overline{QR} = 30t$$

$$\therefore s^2 = (30t)^2 + 200^2$$

..... ㉠

양변을 t 에 대하여 미분하면 $2s \frac{ds}{dt} = 1800t$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 900 \frac{t}{s}$$

$t=5$ 일 때 ㉠에서 $s = \sqrt{150^2 + 200^2} = 250$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 900 \cdot \frac{5}{250} = 18 \text{ (m/초)}$$

따라서 5초 후에 자동차가 멀어지는 속도는 18 m/초이다.

답 18

0738 오른쪽 그림의 정사각형 OABC에서 $\overline{OA} = 27$ 이고, 주자의 위치를 P라 하면 $\overline{AP} = 9t$ 이고 $\overline{OP} = s$ 라 하면

$$s^2 = (9t)^2 + 27^2$$

$$= 81t^2 + 729 \quad \text{..... ㉠}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$2s \frac{ds}{dt} = 162t \quad \therefore \frac{ds}{dt} = \frac{81t}{s}$$

$9t=9$ 일 때 $t=1$ 이므로 ㉠에 대입하면

$$s = \sqrt{81 + 729} = 9\sqrt{10}$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{81}{9\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10} \text{ (m/초)}$$

따라서 주자가 1루에서 9m 떨어진 지점을 지날 때 홈플레이트에서 멀어지는 속력은 $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ m/초이다.

답 ②

0739 $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t + 2 \sin t$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (-\sin t, \cos t + 2 \sin t)$$

$$\therefore |\vec{v}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t + 2 \sin t)^2}$$

$$= \sqrt{5 \sin^2 t + 4 \sin t \cos t + \cos^2 t}$$

$$= \sqrt{1 + 4 \sin^2 t + 2 \sin 2t}$$

$$= \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + 2 \sin 2t}$$

$$= \sqrt{3 + 2 \sin 2t - 2 \cos 2t}$$

$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin \left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

따라서 속력이 최대일 때는 $\sin \left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 일 때이므로 구하는

$$\text{최대값은 } \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

답 $\sqrt{2} + 1$

0740 $\frac{dx}{dt}=6, \frac{dy}{dt}=6-6t$ [30% 배점]

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면
 $\vec{v}=(6, 6-6t)$

$\therefore |\vec{v}|=\sqrt{6^2+(6-6t)^2}=6\sqrt{t^2-2t+2}$ [30% 배점]

$|\vec{v}|=6\sqrt{10}$ 에서 $6\sqrt{t^2-2t+2}=6\sqrt{10}$
 $t^2-2t+2=10, \quad t^2-2t-8=0$
 $(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=4 (\because t>0)$ [40% 배점]

답 4

0741 $\frac{dx}{dt}=2, \frac{dy}{dt}=-2t+4$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면
 $\vec{v}=(2, -2t+4)$

$\therefore |\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-2t+4)^2}=\sqrt{4(t-2)^2+4}$

따라서 $|\vec{v}|$ 가 최소가 되는 것은 $t=2$ 일 때이고, 이 때 점 P의 위치는 $x=2 \cdot 2=4, y=-2^2+4 \cdot 2=4$
 $\therefore a+b=4+4=8$

답 ④

0742 $\frac{dx}{dt}=a-\cos t, \frac{dy}{dt}=\sin t$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면
 $\vec{v}=(a-\cos t, \sin t)$

$t=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $\vec{v}=(a-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$|\vec{v}|=1$ 이므로 $\sqrt{(a-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$

$a^2-a+1=1, \quad a(a-1)=0$
 $\therefore a=1 (\because a \neq 0)$

답 ⑤

0743 $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt}=e^t(\sin t + \cos t)$

이므로 $\vec{v}=(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$

$t=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\vec{v}=(e^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-1), e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 1)=(-e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 속도 $\vec{v}$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\tan \theta = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{-e^{\frac{\pi}{2}}} = -1 \quad \therefore \theta = \frac{3}{4}\pi (\because 0 < \theta < \pi)$ [40% 배점]

답 ④

0744 $\frac{dx}{dt}=e, \frac{dy}{dt}=e^2-2et$ 이므로 $\vec{v}=(e, e^2-2et)$

점 P의 속도 $\vec{v}$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이므로
 $\tan 45^\circ = 1 = \frac{e^2-2et}{e}, \quad e^2-2et=e$

$e-2t=1 \quad \therefore t=\frac{e-1}{2}$

답 ①

0745 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$\frac{x}{4} \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \quad \therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{4y}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$

이 때, $\frac{dy}{dt}=4$ 이고, 점 P의 x 좌표가 2일 때

$\frac{4}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad y^2 = 1 \quad \therefore y = 1 (\because y > 0)$

$\therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{4 \cdot 1}{2} \cdot 4 = -8$

답 -8

0746 $x^2+y^2=5$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$

이 때, $\frac{dx}{dt}=a$ 이고, 원과 직선 $y=2x$ 의 교점의 좌표를 $(k, 2k)$

로 놓으면

$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{2k} \cdot a = -\frac{a}{2}$

답 ①

0747 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{15}, \frac{dy}{dt}=3t^2-5$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=6t$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$ 라 하면

$\vec{v}=(\sqrt{15}, 3t^2-5), \vec{a}=(0, 6t)$

$|\vec{v}|=8$ 에서 $\sqrt{15+(3t^2-5)^2}=8$

$(3t^2-5)^2=49, \quad 3t^2-5=\pm 7$

$t^2=4 \quad \therefore t=2 (\because t>0)$

따라서 시각 $t=2$ 에서의 가속도는 $\vec{a}=(0, 12)$

$\therefore |\vec{a}|=\sqrt{0+12^2}=12$

답 ③

0748 $\frac{dx}{dt}=2at-a \cos t, \frac{dy}{dt}=1+a \sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=2a+a \sin t, \frac{d^2y}{dt^2}=a \cos t$

[40% 배점]

이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라 하면

$\vec{a}=(2a+a \sin t, a \cos t)$

따라서 시각 $t=\pi$ 에서의 가속도는 $\vec{a}=(2a, -a)$

$\therefore |\vec{a}|=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a$

[40% 배점]

$|\vec{a}|=3\sqrt{5}$ 에서 $\sqrt{5}a=3\sqrt{5}$

$5a^2=45 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$

[20% 배점]

답 3

0749 $0 < x < 3$ 에서 주어진 부등식을 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록한 모양이므로 $0 < x < 3$ 에서 $f''(x) < 0$ 을 만족한다.

$\neg, f'(x)=1-e^{-x}, f''(x)=e^{-x}$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) > 0$

$$\text{ㄴ. } f'(x) = \frac{1}{x} - 2x, f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) < 0$

$$\text{ㄷ. } f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x, f''(x) = -\sin x$$

이므로 $0 < x < 3$ 에서 $f''(x) < 0$

이상에서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다. **답 ④**

0750 $f'(x)=0$ 의 세 실근을 $\alpha, 4, \beta$ ($\alpha < 0, \beta > 6$)라 하면 함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	...	α	...	1	...	4	...	6	...	β	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+	0	-	-	-
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	변곡점	↗	변곡점	↗	극대	↘

ㄱ. $f'(a)=0, f'(\beta)=0$ 이고 $x=a, x=\beta$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=a, x=\beta$ 에서 극값을 가진다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 구간 $[4, 6]$ 에서 아래로 볼록하므로

$4 < x_1 < x_2 < 6$ 인 x_1, x_2 에 대하여

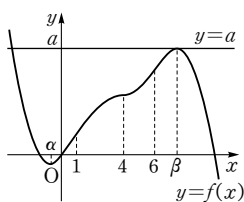
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ 이다.}$$

ㄷ. $f(0)=0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=a$ ($a > 0$)의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$ 의 극대값은 $f(\beta)=a$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③



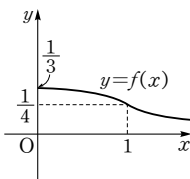
$$\text{0751 } f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+3)^2 - 2x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ (}\because x \geq 0\text{)}$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		—	—	—
$f''(x)$		—	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\curvearrowright$	$\frac{1}{4}$	$\curvearrowright$



이 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+3} = 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같고, t 의 값은 곡선 위의 점에서의 접선의 y 절편이므로 t 의 값이 최대가 되는 것은 접점이 변곡점일 때이다.

$f'(1) = -\frac{1}{8}$ 이므로 변곡점 $(1, \frac{1}{4})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$$

따라서 $x=0$ 일 때 $y=\frac{3}{8}$ 이므로 t 의 최대값은 $\frac{3}{8}$ 이다. **답 ②**

$$\text{0752 } f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-x^2-x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2-2x+1)-2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{8}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	...	-1	...	(1)	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	-	-		+	+	+
$f(x)$	↗	-1	↘		↘	7	↗

$$\text{한편, } f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1} = \frac{x(x-1)+2(x-1)+4}{x-1} = x+2 + \frac{4}{x-1}$$

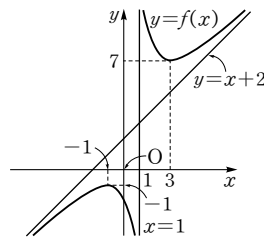
이므로 $y=x+2, x=1$ 은 점근선이다.

따라서 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 극대점은

$(-1, -1)$, 극소점은 $(3, 7)$ 이므로 극대값과 극소값의 합은 $-1+7=6$ 이다.

④ $x < 1$ 에서 위로 볼록이고, $x > 1$ 에서 아래로 볼록이다.

답 ④



0753 방정식 $\frac{g'(x)}{f'(x)} + \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$ 의 양변에 $f'(x)g'(x)$ 를 곱하여 정리하면

$$\{f'(x)\}^2 - 2f'(x)g'(x) + \{g'(x)\}^2 = 0$$

$$\{f'(x) - g'(x)\}^2 = 0$$

$$\therefore f'(x) - g'(x) = 0$$

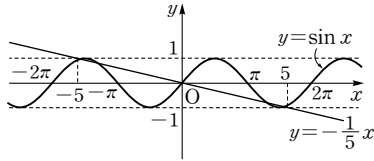
..... ㉠

$f(x) - g(x) = \frac{1}{10}x^2 - \cos x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{5}x + \sin x$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{5}x + \sin x = 0$ 이고, 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = -\frac{1}{5}x$ 의 교점의 개수와 같으므로 아래 그림에서 5개이다.



답 5

0754 방정식 $x^2 - \ln(1+2x^2) = k$ 가 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y = x^2 - \ln(1+2x^2)$ 과 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x^2 - \ln(1+2x^2)$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 2x - \frac{4x}{1+2x^2} = \frac{2x(2x^2-1)}{1+2x^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

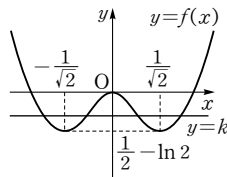
x	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	$\nearrow$

또, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} - \ln 2 < k < 0$$



답 ①

0755 오른쪽 그림에서

$$30 : x = 50 : (100 + x)$$

$$50x = 30x + 3000 \quad \therefore x = 150$$

또, 수면의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$30 : x = r : (x + h)$$

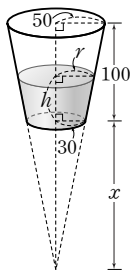
$$xr = 30(x + h)$$

$$\therefore r = \frac{30(x+h)}{x} = \frac{h+150}{5}$$

따라서 물의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h+150) - \frac{1}{3}\pi \cdot 30^2 \cdot 150$$

$$= \frac{1}{75}\pi(h+150)^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot 30^2 \cdot 150$$



양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{25}\pi(h+150)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi(h+150)^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

이 때, $\frac{dV}{dt} = -4\sqrt{h}$ 이고, $h=50$ 이므로

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi \cdot 200^2} \cdot (-4\sqrt{50}) = -\frac{5\sqrt{2}}{4\pi} \times 10^{-2}$$

답 ④

0756 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = 2e^{2t}, g'(t) = 2kt$$

이므로 $f'(t) = g'(t)$ 에서

$$2e^{2t} = 2kt \quad \therefore e^{2t} = kt$$

두 점 P, Q의 속도가 같은 시각이 한 번 뿐이라면 방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 두 함수 $y = e^{2t}$, $y = kt$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 접해야 한다.

$F(t) = e^{2t}$, $G(t) = kt$ 로 놓으면

$$F'(t) = 2e^{2t}, G'(t) = k$$

점접의 x 좌표를 a 라 하면

$$F(a) = G(a) \text{에서 } e^{2a} = ka$$

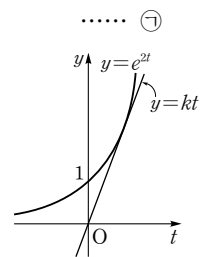
$$F'(a) = G'(a) \text{에서 } 2e^{2a} = k$$

$$\text{㉡을 ㉢에 대입하면 } 2ka = k$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because k \neq 0)$$

$$a = \frac{1}{2} \text{을 ㉢에 대입하면 } k = 2e$$

답 ⑤



0757 지점 O로부터 갑이 출발한 지 t 초가 지난 후 갑과 을의 위치를 각각 A, B라 하면

$$\overline{OA} = 3t, \overline{BE} = 4(t-10)$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\overline{BC} = 7t - 40, \overline{AC} = 40$$

이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{7t-40}{40}$$

..... ㉠

양변을 t 에 대하여 미분하면 $\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40}$ 이므로

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40} \cdot \frac{1}{\sec^2 \theta} = \frac{7}{40} \cdot \frac{1}{1+\tan^2 \theta}$$

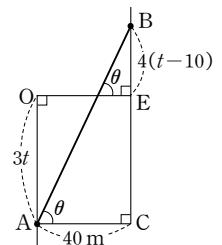
..... ㉡

$$\text{㉠에 } t=20 \text{을 대입하면 } \tan \theta = \frac{5}{2}$$

이를 ㉡에 대입하면

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{40} \cdot \frac{1}{1+\frac{25}{4}} = \frac{7}{290} \text{ (라디안/초)}$$

답 ③



0758 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \sin t + \overrightarrow{OB} \cos t$
 $= (\sin t, 2 \sin t) + (-\cos t, 2 \cos t)$
 $= (\sin t - \cos t, 2 \sin t + 2 \cos t)$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \sin t - \cos t, y = 2 \sin t + 2 \cos t$$

이므로 $\frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t, \frac{dy}{dt} = 2 \cos t - 2 \sin t$

$$\therefore \vec{v} = (\cos t + \sin t, 2 \cos t - 2 \sin t)$$

두 벡터 $\vec{v}, \overrightarrow{OP}$ 가 수직이면 $\vec{v} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} &(\cos t + \sin t)(\sin t - \cos t) \\ &+ (2 \cos t - 2 \sin t)(2 \sin t + 2 \cos t) = 0 \\ &(\sin^2 t - \cos^2 t) + 4(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0 \end{aligned}$$

$$\cos^2 t - \sin^2 t = 0, (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t) = 0$$

$$\therefore \cos t = \sin t \text{ 또는 } \cos t = -\sin t$$

그런데 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $t = \frac{\pi}{4}$

따라서 $\vec{v} = (\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

답 ②

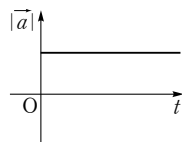
0759 $\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t), \frac{dy}{dt} = r \sin t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r \sin t, \frac{d^2y}{dt^2} = r \cos t$$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는 $\vec{a} = (r \sin t, r \cos t)$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{(r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r$$

따라서 시각 t 에 대한 가속도의 크기 $|\vec{a}|$ 를 나타내는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ⑤

0760 $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3}$

$$= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x^2(x-3) = 0 \therefore x = 0$ 또는 $x = 3$

$f''(x) = 0$ 에서 $x = 0$ [30% 배점]

x	...	0	...	(1)	...	3	...
$f'(x)$	+	0	+		-	0	+
$f''(x)$	-	0	+		+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

[30% 배점]

또, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \infty$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$x^3 = k(x-1)^2 \text{에서}$$

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = k (x \neq 1)$$

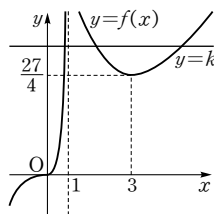
이므로 방정식 $x^3 = k(x-1)^2$ 이 서로

다른 세 실근을 가지려면 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 의 그래프와 $y = k$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$k > \frac{27}{4}$$

[40% 배점]

답 $k > \frac{27}{4}$



0761 수면의 높이를 x , 물의 부피를 V , 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$V = \int_0^x S(x) dx$$

[20% 배점]

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt} = S(x) \frac{dx}{dt} \therefore \frac{dx}{dt} = \frac{1}{S(x)} \cdot \frac{dV}{dt}$$

이 때, $\frac{dV}{dt} = 6$ 이므로 $\frac{dx}{dt} = \frac{6}{S(x)}$

[30% 배점]

오른쪽 그림에서 $x = 2$ 일 때 수면의 반지름의 길이는 $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

이므로 수면의 넓이는

$$S(2) = 4^2 \pi = 16\pi$$

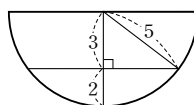
[30% 배점]

따라서 $x = 2$ 일 때의 수면의 높이의 변화율은

$$\frac{6}{16\pi} = \frac{3}{8\pi} \text{ (cm/초)}$$

[20% 배점]

답 $\frac{3}{8\pi}$



0762 $\frac{dx}{dt} = \cos t, \frac{dy}{dt} = \cos t - \sin t$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (\cos t, \cos t - \sin t)$$

[30% 배점]

$$\therefore |\vec{v}| = \sqrt{\cos^2 t + (\cos t - \sin t)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 t + 1 - 2 \sin t \cos t}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{2} + 1 - \sin 2t}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t - \sin 2t}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2t + \alpha)}$$

$$\left(\text{단, } \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

[40% 배점]

$|\vec{v}|$ 는 $\sin(2t + \alpha) = 1$ 일 때 최대값을 가지므로 $|\vec{v}|$ 의 최대값은

$$\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

따라서 $a + b\sqrt{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 에서 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a + b = 1$$

[30% 배점]

답 1

IV. 적분법

07 부정적분

$$\begin{aligned} 0763 \quad f(x) &= (4 \sin x - \cos x + C)' \\ &= 4 \cos x + \sin x \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$0764 \quad f(x) = (e^{-x} + C)' = -e^{-x} \quad \cdots \text{답}$$

$$0765 \quad f(x) = (2 \ln x + x^3 + C)' = \frac{2}{x} + 3x^2 \quad \cdots \text{답}$$

$$0766 \quad \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln|x| + C \quad \cdots \text{답}$$

$$0767 \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C \quad \cdots \text{답}$$

$$0768 \quad \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C \quad \cdots \text{답}$$

$$\begin{aligned} 0769 \quad \int x\sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0770 \quad \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0771 \quad \int (\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1) dx &= \int (\sqrt[4]{x^2}-1) dx \\ &= \int (x^{\frac{1}{2}}-1) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x + C \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0772 \quad \int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0773 \quad \int (2 \sin x + 4 \cos x) dx \\ &= 2 \int \sin x dx + 4 \int \cos x dx \\ &= -2 \cos x + 4 \sin x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0774 \quad \int (3 \operatorname{cosec} x - \tan x) \cot x dx \\ &= \int (3 \operatorname{cosec} x \cot x - 1) dx \\ &= -3 \operatorname{cosec} x - x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0775 \quad \int (\cos x + \tan x) \sec x dx \\ &= \int (1 + \sec x \tan x) dx \\ &= x + \sec x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0776 \quad \int \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx &= \int (2 \sec^2 x - 1) dx \\ &= 2 \tan x - x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0777 \quad \int \frac{\sin^2 x + 3}{\sin^2 x} dx &= \int (1 + 3 \operatorname{cosec}^2 x) dx \\ &= x - 3 \cot x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0778 \quad 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x \text{ 이므로} \\ \tan^2 x &= \sec^2 x - 1 \\ \therefore \int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x - x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0779 \quad 1 + \cot^2 x &= \operatorname{cosec}^2 x \text{ 이므로} \\ \cot^2 x &= \operatorname{cosec}^2 x - 1 \\ \therefore \int \cot^2 x dx &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx \\ &= -\cot x - x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0780 \quad \int (3e^x + 2^x) dx &= 3 \int e^x dx + \int 2^x dx \\ &= 3e^x + \frac{2^x}{\ln 2} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0781 \quad \int e^{x+2} dx &= \int e^x e^2 dx \\ &= e^2 \int e^x dx \\ &= e^2 e^x + C \\ &= e^{x+2} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0782 \quad \int \frac{x \cdot 3^x + 4}{x} dx &= \int \left(3^x + \frac{4}{x} \right) dx \\ &= \frac{3^x}{\ln 3} + 4 \ln |x| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0783 \quad 4x-1=t \text{로 놓으면 } 4 \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int (4x-1)^3 dx &= \int t^3 \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{16} t^4 + C \\ &= \frac{1}{16} (4x-1)^4 + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0784 \quad 2x+1=t \text{로 놓으면 } 2 \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \frac{1}{2x+1} dx &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0785 \quad 3-x=t \text{로 놓으면 } -\frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \sqrt{3-x} dx &= \int \sqrt{t} \cdot (-1) dt = -\int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} t \sqrt{t} + C \\ &= -\frac{2}{3} (3-x) \sqrt{3-x} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0786 \quad 2x-1=t \text{로 놓으면 } 2 \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \cos(2x-1) dx &= \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \sin t + C \\ &= \frac{1}{2} \sin(2x-1) + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0787 \quad -x+1=t \text{로 놓으면 } -\frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int e^{-x+1} dx &= \int e^t \cdot (-1) dt = -e^t + C \\ &= -e^{-x+1} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0788 \quad x^2+1=t \text{로 놓으면 } 2x \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int 2x(x^2+1)^2 dx &= \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C \\ &= \frac{1}{3} (x^2+1)^3 + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0789 \quad x^2-1=t \text{로 놓으면 } 2x \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C \\ &= \sqrt{x^2-1} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0790 \quad \sin x=t \text{로 놓으면 } \cos x \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \sin^3 x \cos x dx &= \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0791 \quad x^2=t \text{로 놓으면 } 2x \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int 2xe^{x^2} dx &= \int e^t dt = e^t + C \\ &= e^{x^2} + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0792 \quad \ln x=t \text{로 놓으면 } \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0793 \quad x^2+3=t \text{로 놓으면 } 2x \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \frac{x}{x^2+3} dx &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2+3) + C \quad (\because x^2+3 > 0) \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0794 \quad x^2-x+2=t \text{로 놓으면 } (2x-1) \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \frac{2x-1}{x^2-x+2} dx &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C \\ &= \ln (x^2-x+2) + C \quad (\because x^2-x+2 > 0) \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0795 \quad \cot x=t \text{로 놓으면 } -\operatorname{cosec}^2 x \frac{dx}{dt} &= 1 \text{이므로} \\ \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} dx &= \int \frac{1}{t} \cdot (-1) dt \\ &= -\ln |t| + C \\ &= -\ln |\cot x| + C \\ &= \ln |\tan x| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0796 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$-\sin x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{t} \cdot (-1) dt \\ &= -\ln|t| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \\ &= \ln|\sec x| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0797 $e^x - 1 = t$ 로 놓으면 $e^x \frac{dx}{dt} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx &= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C \\ &= \ln|e^x - 1| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0798 $\frac{x^2+4}{x-1} = x+1 + \frac{5}{x-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+4}{x-1} dx &= \int \left(x+1 + \frac{5}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + 5\ln|x-1| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0799 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + C \\ &= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0800 $\frac{3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$

로 놓으면

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x^2-2x-3} &= \frac{(a+b)x - 3a + b}{(x+1)(x-3)} \\ \therefore a+b &= 3, \quad -3a+b = -1 \end{aligned}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, \quad b=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{3x-1}{x^2-2x-3} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} \right) dx \\ &= \ln|x+1| + 2\ln|x-3| + C \\ &= \ln|(x+1)(x-3)^2| + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0801 두 함수의 곱의 미분법에 의하여

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \\ \therefore \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \end{aligned}$$

... 증명 끝

0802 $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1, \quad g(x) = e^x \\ \therefore \int x e^x dx &= x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0803 $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1, \quad g(x) = \sin x \\ \therefore \int x \cos x dx &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

0804 $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \\ \therefore \int \ln x dx &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \ln x - x + C \quad \cdots \text{답} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0805} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2h} \cdot 2 \\ &= 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

이 때, $f(x) = \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \\ \therefore 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4}}{1 - \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ④

0806 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x + \sec^2 x \\ \therefore f(\pi) &= e^\pi \sin \pi + e^\pi \cos \pi + \sec^2 \pi \\ &= -e^\pi + 1 \end{aligned}$$

답 ②

0807 $f(x) = \int (x^2 + ae^{2x} + 2x) dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) = x^2 + ae^{2x} + 2x$
 $x = -2$ 인 점에서의 접선의 기울기가 e^2 이므로
 $f'(-2) = e^2, \quad 4 + ae^{-4} - 4 = e^2$
 $ae^{-4} = e^2 \quad \therefore a = e^6$ 답 ⑤

0808 $F(x) = xf(x) - x - \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = f(x) + xf'(x) - 1 - \frac{1}{x}$
 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
 $\therefore f(x) = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-2} \right) dx$
 $= \ln x - \frac{1}{x} + C$
 $f(1) = -1$ 이므로 $-1 = 0 - 1 + C \quad \therefore C = 0$
따라서 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ 이므로 $f(e^2) = 2 - \frac{1}{e^2}$ 답 ⑤

0809 $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx$
 $= \int \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx$
 $= x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$ 답 ④

0810 $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ 이므로
 $f(x) = \int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} dx$
 $= \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} dx = \int (\sqrt{x}-1) dx$
 $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$ [40% 배점]

$f(1) = \frac{2}{3}$ 이므로
 $\frac{2}{3} - 1 + C = \frac{2}{3} \quad \therefore C = 1$ [30% 배점]
따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 1$ 이므로
 $f(4) = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} - 4 + 1 = \frac{7}{3}$ [30% 배점]

답 $\frac{7}{3}$

0811 $f(x) = \int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} dx$
 $= \int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x} dx$
 $= \int (1+\sin x) dx$
 $= x - \cos x + C$

$f(0) = 1$ 이므로 $-1 + C = 1 \quad \therefore C = 2$
따라서 $f(x) = x - \cos x + 2$ 이므로
 $f(\pi) = \pi - \cos \pi + 2 = \pi + 3$ 답 ③

0812 주어진 식의 양변을 Δx 로 나누면
 $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \cos x + \Delta x$
이 때, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ 이므로
 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\cos x + \Delta x) = \cos x$
 $\therefore f(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$

$f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$
따라서 $f(x) = \sin x$ 이므로
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ 답 ④

0813 $\int \frac{\sin x(\sin x - 1)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$
 $= \int (\tan^2 x - \tan x \sec x) dx$
 $= \int (\sec^2 x - 1 - \tan x \sec x) dx$
 $= \tan x - x - \sec x + C$
따라서 $p = 1, q = -1, r = -1$ 이므로
 $pqr = 1$ 답 1

0814 $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx$
 $= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx$
 $= \int (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx$
 $= -\cot x + \csc x + C$ 답 ④

0815 $f(x) = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx$
 $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$

$f(0) = \pi$ 이므로 $C = \pi$
따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + \pi$ 이므로
 $f(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin \pi + \pi = \frac{3}{2}\pi$ 답 $\frac{3}{2}\pi$

0816 $\frac{d}{dx} f(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$
 $= \sin x + \frac{1+\cos x}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int \left(\sin x + \frac{1+\cos x}{2} \right) dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C \quad [50\% \text{ 배점}]\end{aligned}$$

$$f(\pi) = 1 \text{ 이므로 } 1 + \frac{\pi}{2} + C = 1$$

$$\therefore C = -\frac{\pi}{2} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\cos x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$f(2\pi) = -1 + \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad [20\% \text{ 배점}]$$

답 $\frac{\pi}{2} - 1$

$$\begin{aligned}0817 \quad f(x) &= \int \frac{1-e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{(1+e^x)(1-e^x)}{1+e^x} dx \\ &= \int (1-e^x) dx = x - e^x + C\end{aligned}$$

$$f(0) = 1 \text{ 이므로 } -1 + C = 1 \quad \therefore C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x - e^x + 2 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 1 - e + 2 = 3 - e$$

답 ①

$$0818 \quad f'(x) = \frac{3x^2e^x - 2}{x^2} \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \frac{3x^2e^x - 2}{x^2} dx = \int (3e^x - 2x^{-2}) dx \\ &= 3e^x + 2x^{-1} + C = 3e^x + \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

$$f(1) = 3e + 1 \text{ 이므로}$$

$$3e + 2 + C = 3e + 1 \quad \therefore C = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3e^x + \frac{2}{x} - 1 \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = 3e^{-1} - 2 - 1 = 3\left(\frac{1}{e} - 1\right) \quad \text{답 } 3\left(\frac{1}{e} - 1\right)$$

$$\begin{aligned}0819 \quad y &= \ln x + 1 \text{ 로 놓으면 } y - 1 = \ln x \\ \therefore x &= e^{y-1}\end{aligned}$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 서로 바꾸면 } y = e^{x-1}$$

$$\text{따라서 } g(x) = e^{x-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\int g(x) dx &= \int e^{x-1} dx = \int e^x e^{-1} dx \\ &= e^{-1} \int e^x dx = e^{-1} \cdot e^x + C \\ &= e^{x-1} + C\end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}0820 \quad \int \frac{8^x - 1}{2^x - 1} dx &= \int \frac{(2^x - 1)(4^x + 2^x + 1)}{2^x - 1} dx \\ &= \int (4^x + 2^x + 1) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{\ln 4}, b = \frac{1}{\ln 2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{\ln 4}}{\frac{1}{\ln 2}} = \frac{\ln 2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}0821 \quad \int 5^{2x+1} dx &= 5 \int 25^x dx = 5 \cdot \frac{25^x}{\ln 25} + C \\ &= \frac{5 \cdot 5^{2x}}{2 \ln 5} + C = \frac{5^{2x+1}}{2 \ln 5} + C\end{aligned}$$

$$\therefore a = 2 \ln 5$$

답 ②

$$\begin{aligned}0822 \quad f(x) &= \int 3^x(3^x + 2) dx = \int (3^{2x} + 2 \cdot 3^x) dx \\ &= \int (9^x + 2 \cdot 3^x) dx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + C \quad [40\% \text{ 배점}]\end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{2}{\ln 3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{\ln 9} + \frac{2}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3}$$

$$\therefore C = -\frac{1}{\ln 9}$$

[30% 배점]

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 9} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{9}{\ln 9} + \frac{6}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 9} = \frac{8}{\ln 9} + \frac{6}{\ln 3} \\ &= \frac{8}{2 \ln 3} + \frac{6}{\ln 3} = \frac{10}{\ln 3}\end{aligned}$$

[30% 배점]

답 $\frac{10}{\ln 3}$

$$\begin{aligned}0823 \quad \int (10^x - 1)(100^x + 10^x + 1) dx \\ &= \int (10^x - 1)(10^{2x} + 10^x + 1) dx \\ &= \int (10^{3x} - 1) dx \\ &= \int (1000^x - 1) dx \\ &= \frac{1000^x}{3 \ln 10} - x + C\end{aligned}$$

답 ④

$$0824 \quad 3x + 2 = t \text{ 로 놓으면 } 3 \frac{dx}{dt} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\int (3x + 2)^6 dx &= \int t^6 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{21} t^7 + C \\ &= \frac{1}{21} (3x + 2)^7 + C\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = 21, b = 7 \text{ 이므로}$$

$$a - b = 14$$

답 ②

0825 $x^2+x-1=t$ 로 놓으면 $(2x+1)\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2x+1)(x^2+x-1)^5 dx \\ &= \int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6 + C \\ &= \frac{1}{6}(x^2+x-1)^6 + C \end{aligned}$$

$f(0)=1$ 이므로 $\frac{1}{6}+C=1 \quad \therefore C=\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(x^2+x-1)^6+\frac{5}{6}$ 이므로

$$f(1)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

답 ①

0826 $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ 이므로

$$f(x)=\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$$

$x^2+x+1=t$ 로 놓으면 $(2x+1)\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln|t| + C \end{aligned}$$

$$= \ln(x^2+x+1) + C \quad (\because x^2+x+1 > 0)$$

$f(-1)=2$ 이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\ln(x^2+x+1)+2$ 이므로

$$f(1)=\ln 3+2$$

답 ④

0827 $f'(x)=2f(x)$ 에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2$ 이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 2 dx$$

$$\ln f(x) = 2x + C \quad (\because f(x) > 0)$$

$$\therefore f(x) = e^{2x+C}$$

또, $f'(0)=2f(0)$ 에서

$$2=2f(0) \quad \therefore f(0)=1$$

즉, $e^C=1$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}$ 이므로 $f(1)=e^2$

답 ⑤

0828 $x^2-2x-2=t$ 로 놓으면 $2(x-1)\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$f(x)=\int \frac{x-1}{x^2-2x-2} dx$$

$$= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-2| + C$$

$$f(-1)=0 \text{이므로} \quad C=0$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2} \ln|x^2-2x-2|$$

$$f(x)=0 \text{에서} \quad \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-2|=0$$

$$|x^2-2x-2|=1$$

$$\therefore x^2-2x-2=1 \text{ 또는 } x^2-2x-2=-1$$

(i) $x^2-2x-2=1$ 일 때,

$$x^2-2x-3=0 \text{이므로 판별식을 } D_1 \text{이라 하면}$$

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1 \cdot (-3)>0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 x 의 값의 곱은 -3 이다.

(ii) $x^2-2x-2=-1$ 일 때,

$$x^2-2x-1=0 \text{이므로 판별식을 } D_2 \text{라 하면}$$

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-1 \cdot (-1)>0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 x 의 값의 곱은 -1 이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$-3 \cdot (-1)=3$$

답 ③

0829 $x^2+1=t$ 로 놓으면 $2x\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} t\sqrt{t} + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

$$\therefore a=\frac{1}{3}$$

답 ①

다른 풀이 $\sqrt{x^2+1}=t$ 로 놓으면 $x^2+1=t^2$

$$2x\frac{dx}{dt}=2t \quad \therefore x\frac{dx}{dt}=t$$

$$\therefore \int x\sqrt{x^2+1} dx = \int t \cdot t dt = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$

0830 $\ln x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

$$= 2\sqrt{\ln x+1} + C$$

답 ③

0831 $1-x^2=t$ 로 놓으면 $-2x \frac{dx}{dt}=1$ 이므로 [20% 배점]

$$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$=-\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$=-\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$
 [40% 배점]

$$f(1)=0 \text{이므로 } C=0$$

$$\therefore f(x)=-\sqrt{1-x^2}$$
 [40% 배점]

답 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$

0832 $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{1+\cos x} dx$
 $= \int \frac{(1-\cos^2 x) \cdot \sin x}{1+\cos x} dx$
 $= \int (1-\cos x) \sin x dx$

이 때, $1-\cos x=t$ 로 놓으면 $\sin x \frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int (1-\cos x) \sin x dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C$$

$$= \frac{1}{2} (1-\cos x)^2 + C$$

답 ④

0833 $1-\sin 2x=t$ 로 놓으면 $-2 \cos 2x \frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int (1-\sin 2x)^2 \cos 2x dx = \int t^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= -\frac{1}{6} (1-\sin 2x)^3 + C$$

$$\therefore a = -\frac{1}{6}$$

답 ④

0834 $f(x)=\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx$
 $= \int (1-\sin^2 x) \cos x dx$

이 때, $\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x \frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int (1-\sin^2 x) \cos x dx = \int (1-t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$f(\pi)=1 \text{이므로 } C=1$$

따라서 $f(x)=\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} + 1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

답 ②

0835 $\int \sin 3x \cos x dx$
 $= \int \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx$
 $= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cos 4x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2x + C$
 $= -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$
 $= a \cos 4x + b \cos 2x + C$
 따라서 $a = -\frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{4}$ 이므로
 $a+b = -\frac{3}{8}$

답 ②

0836 $f'(x)=2 \cos^2 x + \cos x$ 이므로

$$f(x)=\int (2 \cos^2 x + \cos x) dx$$

$$= \int \left(2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} + \cos x\right) dx$$

$$= \int (\cos 2x + \cos x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x + x + C$$

$$f(0)=1 \text{이므로 } C=1$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2} \sin 2x + \sin x + x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2} \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 2$$

답 ⑤

0837 $f(x)=\int \sin 2x \cos^2 x dx + \int 2 \sin^3 x \cos x dx$
 $= \int (2 \sin x \cos^3 x + 2 \sin^3 x \cos x) dx$
 $= \int \{2 \sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x)\} dx$
 $= \int 2 \sin x \cos x dx = \int \sin 2x dx$
 $= -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

$$f(\pi)=-\frac{1}{2} \text{이므로 } C=0$$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2} \cos 2x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \cos \frac{2}{3} \pi = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

답 ④

0838 $x-\sin x=t$ 로 놓으면 $(1-\cos x) \frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int \frac{\cos x - 1}{x - \sin x} dx = \int \frac{1}{t} \cdot (-1) dt = -\ln |t| + C$$

$$= -\ln |x - \sin x| + C$$

답 ②

0839 $2 - \cos x = t$ 로 놓으면 $\sin x \frac{dx}{dt} = 1$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C$$

$$= \ln(2 - \cos x) + C \quad (\because 2 - \cos x > 0)$$

$$f(0) = 0 \text{이므로} \quad C = 0$$

따라서 $f(x) = \ln(2 - \cos x)$ 이므로

$$f(\pi) = \ln(2 - \cos \pi) = \ln 3$$

답 ln 3

0840 $x^2 + 1 = t$ 로 놓으면 $2x \frac{dx}{dt} = 1$ 이므로

$$f(x) = \int 4xe^{x^2+1} dx = \int e^t \cdot 2 dt$$

$$= 2e^t + C = 2e^{x^2+1} + C$$

$$f(0) = 2e \text{이므로} \quad C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2e^{x^2+1} \text{이므로} \quad f(-1) = 2e^2$$

답 ⑤

0841 $f'(x) + g'(x) = e^x$

..... ㉠

$$f'(x) - g'(x) = e^{-x}$$

..... ㉡

$$\text{㉠} + \text{㉡} \text{을 하면 } f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C_1 \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$f(0) = 1 \text{이므로} \quad \frac{1-1}{2} + C_1 = 1 \quad \therefore C_1 = 1$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1 \quad [20\% \text{ 배점}]$$

$$\text{㉠} - \text{㉡} \text{을 하면 } g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{이므로}$$

$$g(x) = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C_2 \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$g(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1+1}{2} + C_2 = 0 \quad \therefore C_2 = -1$$

$$\therefore g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \quad [20\% \text{ 배점}]$$

$$\text{답 } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1, g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$$

0842 (i) $x > 0$ 일 때, $f'(x) = xe^{x^2}$ 이므로

$$f(x) = \int xe^{x^2} dx$$

$$x^2 = t \text{로 놓으면 } 2x \frac{dx}{dt} = 1 \text{에서}$$

$$f(x) = \int xe^{x^2} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} e^t + C_1 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $f'(x) = \sin^2 x \cos x$ 이므로

$$f(x) = \int \sin^2 x \cos x dx$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면 } \cos x \frac{dx}{dt} = 1 \text{에서}$$

$$f(x) = \int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + C_2 = \frac{1}{3} \sin^3 x + C_2$$

$$f(-\pi) = -2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \sin^3(-\pi) + C_2 = -2 \quad \therefore C_2 = -2$$

또, $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \right) = \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \right)$$

$$\frac{1}{2} + C_1 = -2 \quad \therefore C_1 = -\frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } x > 0 \text{일 때 } f(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} e - \frac{5}{2}$$

답 ①

0843 $xf'(x) = 2 \ln x$ 에서 $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

$$\therefore f(x) = \int \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$\ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{2 \ln x}{x} dx = \int 2t dt = t^2 + C = (\ln x)^2 + C$$

$$f(1) = -4 \text{이므로} \quad C = -4$$

$$\therefore f(x) = (\ln x)^2 - 4$$

$$f(x) = 3 \ln x \text{에서}$$

$$(\ln x)^2 - 4 = 3 \ln x, \quad (\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0$$

$$(\ln x + 1)(\ln x - 4) = 0, \quad \ln x = -1 \text{ 또는 } \ln x = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{e} \text{ 또는 } x = e^4$$

따라서 모든 x 의 값의 곱은

$$\frac{1}{e} \cdot e^4 = e^3$$

답 ②

0844 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$ 이므로

$$\int \frac{(\ln x)^2}{2x} dx = \int \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{6} (\ln x)^3 + C$$

답 ③

0845 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$ 이므로

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos t dt = \sin t + C$$

$$= \sin(\ln x) + C$$

답 ①

$$0846 \quad \frac{2x}{x^2+3x+2} = \frac{2x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

에서 $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x + (2a+b)}{(x+1)(x+2)}$ 이므로

$$a+b=2, \quad 2a+b=0 \quad \therefore a=-2, \quad b=4$$

즉, $\frac{2x}{x^2+3x+2} = -\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x+2}$ 이므로

$$\int \frac{2x}{x^2+3x+2} dx = \int \left(-\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x+2} \right) dx \\ = -2 \ln|x+1| + 4 \ln|x+2| + C$$

답 ④

$$0847 \quad f(x) = \int \frac{x-3}{x^2-x-2} dx + \int \frac{6-x}{x^2-x-2} dx \\ = \int \left(\frac{x-3}{x^2-x-2} + \frac{6-x}{x^2-x-2} \right) dx \\ = \int \frac{3}{x^2-x-2} dx = \int \frac{3}{(x-2)(x+1)} dx \\ = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ = \ln|x-2| - \ln|x+1| + C \\ = \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$ 이므로

$$f(0) = \ln|-2| = \ln 2$$

답 ln 2

$$0848 \quad \frac{x-1}{x^3+1} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

로 놓으면

$$\frac{x-1}{x^3+1} = \frac{a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ = \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a+c}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\therefore a+b=0, \quad -a+b+c=1, \quad a+c=-1$$

위의 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \int \frac{x-1}{x^3+1} dx = \int \left\{ -\frac{2}{3(x+1)} + \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)} \right\} dx \\ = -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \\ = -\frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln(x^2-x+1) + C$$

따라서 $p = -\frac{2}{3}, \quad q = \frac{1}{3}$ 이므로

$$p+q = -\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

$$0849 \quad u(x) = x-1, \quad v'(x) = e^x \text{으로 놓으면} \\ u'(x) = 1, \quad v(x) = e^x$$

$$\therefore \int e^x(x-1) dx = (x-1)e^x - \int e^x dx \\ = (x-1)e^x - e^x + C \\ = e^x(x-2) + C$$

$f(0) = -2$ 이므로 $-2 + C = -2 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x) = e^x(x-2)$ 이므로 $f(3) = e^3$

답 ⑤

$$0850 \quad u(x) = x, \quad v'(x) = \cos 2x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\therefore \int x \cos 2x dx = x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$ 이므로 $\frac{a}{b} = 2$

답 ⑤

$$0851 \quad \{e^{f(x)}\}' = x \sin x \cdot e^{f(x)} \text{에서}$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = x \sin x \cdot e^{f(x)}$$

$$\therefore f'(x) = x \sin x$$

즉, $f(x) = \int x \sin x dx$ 이므로 $u(x) = x, \quad v'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = -\cos x$$

$$\therefore f(x) = \int x \sin x dx \\ = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ = -x \cos x + \sin x + C$$

$f(0) = -1$ 이므로 $C = -1$

따라서 $f(x) = -x \cos x + \sin x - 1$ 이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ = -1 - 1 = -2$$

답 -2

$$0852 \quad u(x) = \ln(\sin x), \quad v'(x) = \cos x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad v(x) = \sin x$$

$$\therefore f(x) = \int \cos x \cdot \ln(\sin x) dx \\ = \ln(\sin x) \cdot \sin x - \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x dx \\ = \ln(\sin x) \cdot \sin x - \int \cos x dx \\ = \sin x \cdot \ln(\sin x) - \sin x + C$$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$ 이므로 $C = \frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = \sin x \cdot \ln(\sin x) - \sin x + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} \ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0853 $y = e^{2x-1}$ 으로 놓으면 $\ln y = 2x - 1$

$$2x = \ln y + 1 \quad \therefore x = \frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2}$

따라서 $g(x) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int \left(\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \ln x dx + \frac{1}{2} \int dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$\int \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x}, \quad v(x) = x \\ \therefore \int \ln x dx &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \frac{1}{2} (x \ln x - x + C_1) + \frac{1}{2} x + C_2 \\ &= \frac{1}{2} x \ln x + C \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

0854 $g(x) = x^2$, $h'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$g'(x) = 2x, \quad h(x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int x^2 \sin x dx \\ &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$\int x \cos x dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1, \quad v(x) = \sin x \\ \therefore \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C_1) \\ &= (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \text{ 이므로 } \pi + C = \pi \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\pi) &= (2 - \pi^2) \cos \pi + 2\pi \sin \pi \\ &= (2 - \pi^2) \cdot (-1) = \pi^2 - 2 \end{aligned}$$

답 ③

0855 $f(x) = (\ln x)^2$, $g'(x) = 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}, \quad g(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= \int (\ln x)^2 dx = (\ln x)^2 \cdot x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad [30\% \text{ 배점}] \end{aligned}$$

$\int \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x}, \quad v(x) = x \\ \therefore \int \ln x dx &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \quad [30\% \text{ 배점}] \end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} h(x) &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + C_1) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

$h(1) = 2$ 이므로 $C = 0$

따라서 $h(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ 이므로 [20% 배점]

$$h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot \frac{1}{e} \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{5}{e} \quad [20\% \text{ 배점}]$$

답 $\frac{5}{e}$

0856 $f'(x) = e^x \sin x$ 에서 $f(x) = \int e^x \sin x dx$

$h(x) = \sin x$, $k'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos x, \quad k(x) = e^x \\ \therefore f(x) &= \int e^x \sin x dx = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$\int e^x \cos x dx$ 에서 $u(x) = \cos x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\sin x, \quad v(x) = e^x \\ \therefore \int e^x \cos x dx &= \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) e^x dx \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + f(x) + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x - \{e^x \cos x + f(x) + C_1\} \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - f(x) - C_1 \end{aligned}$$

$$2f(x) = e^x (\sin x - \cos x) - C_1$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$$

$$f(0) = -\frac{1}{2} \text{이므로 } \frac{1 \cdot (-1)}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

따라서 $g(x) = \sin x - \cos x$ 이므로

$$g(\pi) = \sin \pi - \cos \pi = 1$$

답 1

0857 $f'(x) = \frac{x-1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{x-1}{x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx \\ = x - \ln|x| + C$$

$$f(1) = 0 \text{이므로 } 1 + C = 0 \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = x - \ln|x| - 1$ 이므로

$$f(e) = e - \ln e - 1 = e - 2$$

0858 $f'(x) = ke^x$ (k 는 상수)으로 놓으면

$$f(x) = \int ke^x dx = ke^x + C$$

$$f(0) = 1, f(\ln 2) = 3 \text{이므로}$$

$$k + C = 1, 2k + C = 3$$

위의 식을 연립하여 풀면

$$k = 2, C = -1$$

따라서 $f(x) = 2e^x - 1$ 이므로

$$f(\ln 3) = 2e^{\ln 3} - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

0859 $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

이 때, 곡선 $y = f(x)$ 가 원점을 지나므로

$$f(0) = 0 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ 이므로

$$a = f(2) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-1}{2+1} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \ln 3$$

답 3

0860 $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$ 에 $a=1, b=1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) - f(1) \quad \therefore f(1) = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= f'(1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (\because x > 0)$$

$$f(1) = 0 \text{이므로 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \ln x \text{이므로 } f(e^2) = \ln e^2 = 2$$

답 2

0861 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = 2a + 3$ 에서 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = 0 \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

이 때,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}a$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{2}a = 2a + 3 \text{에서 } \frac{3}{2}a = -3 \quad \therefore a = -2$$

따라서 $f'(x) = -2 \sin \frac{x}{2}$ 이므로

$$f(x) = \int \left(-2 \sin \frac{x}{2}\right) dx = 4 \cos \frac{x}{2} + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{이므로 } 4 \cos \frac{\pi}{6} + C = 0$$

$$2\sqrt{3} + C = 0 \quad \therefore C = -2\sqrt{3}$$

따라서 $f(x) = 4 \cos \frac{x}{2} - 2\sqrt{3}$ 이므로

$$f(\pi) = 4 \cos \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

답 1

0862 $f(x) = x^n, g'(x) = e^{2x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = nx^{n-1}, g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\therefore F_n = \int x^n e^{2x} dx$$

$$= x^n \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int nx^{n-1} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^n e^{2x} - \frac{n}{2} \int x^{n-1} e^{2x} dx$$

따라서 $2F_n = x^n e^{2x} - n \int x^{n-1} e^{2x} dx$ 이므로

$$\begin{aligned} 2F_{n+1} &= x^{n+1} e^{2x} - (n+1) \int x^n e^{2x} dx \\ &= x^{n+1} e^{2x} - (n+1) F_n \\ \therefore 2F_{n+1} + (n+1) F_n &= x^{n+1} e^{2x} \end{aligned}$$

답 ③

0863 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 α, β 이므로 $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$

따라서 $\frac{1}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)}$ 이고

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} &= \frac{p}{x - \alpha} + \frac{q}{x - \beta} \\ &= \frac{(p + q)x - (\alpha q + \beta p)}{(x - \alpha)(x - \beta)} \end{aligned}$$

이므로 $p + q = 0, \alpha q + \beta p = -1$

$q = -p$ 를 $\alpha q + \beta p = -1$ 에 대입하면

$$\alpha(-p) + \beta p = -1, \quad p(\alpha - \beta) = 1$$

$$\therefore p = \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad q = -\frac{1}{\alpha - \beta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx &= \frac{1}{\alpha - \beta} \int \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right) dx \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\ln|x - \alpha| - \ln|x - \beta|) + C \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right| + C \end{aligned}$$

답 ②

0864 $f'(x) = \sin 2x + \sin x$ 에서

$$f(x) = \int (\sin 2x + \sin x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x + C \quad \dots\dots ⑦$$

$f'(x) = 0$ 에서 $\sin 2x + \sin x = 0$

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0, \quad \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

그런데 $0 < x < \pi$ 에서 $\sin x > 0$ 이므로

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 $0 < x < \pi$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	(π)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

위의 증감표에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 일 때 극대이므로

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$$

$$⑦에서 \quad -\frac{1}{2} \cos \frac{4}{3}\pi - \cos \frac{2}{3}\pi + C = 1$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{1}{4}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x + \frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ③

0865 $\neg. h(x) = \frac{1}{2} \ln f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{2f(x)}, \quad \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{f'(x)}{2f(x)}$$

$$\therefore 2e^x f(x) = f'(x)(e^x + e^{-x})$$

$$\neg. e^x = t \text{로 놓으면} \quad e^x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= \int h'(x) dx = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx \\ &= \int \frac{1}{t + t^{-1}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C \quad (\because t^2 + 1 > 0) \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C \end{aligned}$$

$$\text{이 때, } h(0) = \frac{1}{2} \ln 2 \text{이므로} \quad C = 0$$

따라서 $h(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1)$ 이므로

$$f(x) = e^{2x} + 1$$

$y = e^{2x} + 1$ 이라 하면

$$y - 1 = e^{2x}, \quad \ln(y - 1) = 2x$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \ln(y - 1)$$

x 와 y 를 바꾸면 $f(x)$ 의 역함수는

$$y = \frac{1}{2} \ln(x - 1), \quad \text{즉 } y = \ln \sqrt{x - 1}$$

$$\neg. f(x) = e^{2x} + 1 \text{에서 } f'(x) = 2e^{2x} > 0$$

따라서 $f(x)$ 는 증가함수이다.

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

0866 $f'(x) - 3f(x) = 0, \quad g'(x) - 3g(x) = 0$ 의 양변을 각각 더하면

$$f'(x) + g'(x) - 3\{f(x) + g(x)\} = 0$$

$$f'(x) + g'(x) = 3\{f(x) + g(x)\}$$

$$\therefore \frac{f'(x) + g'(x)}{f(x) + g(x)} = 3$$

따라서 $\int \frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)} dx = \int 3 dx$ 이므로

$$\ln |f(x)+g(x)| = 3x+C$$

$$\therefore f(x)+g(x) = e^{3x+C}$$

$f(0)=0, g(0)=e$ 이므로

$$f(0)+g(0)=e^C=e \quad \therefore C=1$$

$$\therefore f(x)+g(x) = e^{3x+1}$$

$f(x)+g(x)=1$ 에서 $e^{3x+1}=1$

$$3x+1=0 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}$$

답 ②

$$0867 \int e^x \sin^2 x dx = \int e^x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^x dx - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx \quad \dots\dots ㉠$$

$\int e^x \cos 2x dx$ 에서 $f(x)=\cos 2x, g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-2 \sin 2x, g(x)=e^x$$

$$\therefore \int e^x \cos 2x dx = \cos 2x \cdot e^x - \int (-2 \sin 2x \cdot e^x) dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx \quad \dots\dots ㉡$$

$\int e^x \sin 2x dx$ 에서 $u(x)=\sin 2x, v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=2 \cos 2x, v(x)=e^x$$

$$\therefore \int e^x \sin 2x dx = \sin 2x \cdot e^x - \int 2 \cos 2x \cdot e^x dx$$

$$= e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2 \left(e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx \right)$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx$$

$$5 \int e^x \cos 2x dx = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x)$$

$$\therefore \int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) \quad \dots\dots ㉣$$

㉣을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

$$= \frac{e^x}{10} (5 - \cos 2x - 2 \sin 2x) + C$$

따라서 $h(x)=5-\cos 2x-2 \sin 2x$ 이므로

$$h(0)=5-1=4$$

답 ④

0868 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-1 < -\sin x < 1$ 이므로

$$f(x) = 1 - \sin x + \sin^2 x + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - (-\sin x)} = \frac{1}{1 + \sin x}$$

[40% 배점]

$$\therefore F(x) = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

[60% 배점]

$$\text{답 } F(x) = \tan x - \sec x + C$$

0869 $F(x)=xf(x)-x^2 \cos x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - [2x \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)]$$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 2x \cos x + x^2 \sin x$$

$$xf'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

따라서 $f'(x)=2 \cos x - x \sin x$ 이므로

[20% 배점]

$$f(x) = \int (2 \cos x - x \sin x) dx$$

$$= 2 \sin x - \int x \sin x dx$$

$\dots\dots ㉠$

$\int x \sin x dx$ 에서 $u(x)=x, v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=-\cos x$$

$$\therefore \int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

$\dots\dots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x) = 2 \sin x - (-x \cos x + \sin x + C)$$

$$= 2 \sin x + x \cos x - \sin x - C$$

$$= \sin x + x \cos x - C$$

[50% 배점]

이 때, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 에서

$$\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ 즉 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{이므로 } \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - C = 0$$

$$1 - C = 0 \quad \therefore C = 1$$

[20% 배점]

따라서 $f(x)=\sin x+x \cos x-1$ 이므로

$$f(0)=-1$$

[10% 배점]

답 -1

08 정적분

$$\begin{aligned}
 0870 \quad \int_1^4 \sqrt{x} dx &= \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\
 &= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \quad \text{답 } \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0871 \quad \int_1^2 \sqrt[3]{x} dx &= \int_1^2 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_1^2 \\
 &= \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1) \quad \text{답 } \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1)
 \end{aligned}$$

$$0872 \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-x^{-1} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

$$0873 \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^e = \ln e = 1 \quad \text{답 } 1$$

$$\begin{aligned}
 0874 \quad \int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3} dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x} + x^{-3} \right) dx = \left[3 \ln |x| - \frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^2 \\
 &= \left(3 \ln 2 - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} \\
 &= 3 \ln 2 + \frac{3}{8} \quad \text{답 } 3 \ln 2 + \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0875 \quad \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= \left[\ln |x| - \ln |x+1| \right]_1^2 \\
 &= (\ln 2 - \ln 3) + \ln 2 \\
 &= 2 \ln 2 - \ln 3 \quad \text{답 } 2 \ln 2 - \ln 3
 \end{aligned}$$

$$0876 \quad \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2 \quad \text{답 } 2$$

$$\begin{aligned}
 0877 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin 2x) dx &= \left[\sin x - \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = 2 \quad \text{답 } 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0878 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{2} dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$0879 \quad \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \quad \text{답 } \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$0880 \quad \int_0^2 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2} \quad \text{답 } \frac{3}{\ln 2}$$

$$\begin{aligned}
 0881 \quad \cos x \text{는 우함수, } \sin x \text{는 기함수이므로} \\
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
 &= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \quad \text{답 } 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0882 \quad x^2 \text{은 우함수, } \sin 2x \text{는 기함수이므로} \\
 \int_{-1}^1 (x^2 + \sin 2x) dx &= 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \text{답 } \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0883 \quad f(x) = e^x + e^{-x} \text{으로 놓으면} \quad f(-x) &= e^{-x} + e^x = f(x) \\
 \text{따라서 } e^x + e^{-x} \text{은 우함수이므로} \\
 \int_{-2}^2 (e^x + e^{-x}) dx &= 2 \int_0^2 (e^x + e^{-x}) dx = 2 \left[e^x - e^{-x} \right]_0^2 \\
 &= 2 \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \quad \text{답 } 2 \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0884 \quad |\cos x| &= \begin{cases} \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ -\cos x & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_0^\pi |\cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) dx \\
 &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= 1 + 1 = 2 \quad \text{답 } 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0885 \quad |e^x - 1| &= \begin{cases} e^x - 1 & (x \geq 0) \\ -e^x + 1 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx &= \int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\
 &= \left[-e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^1 \\
 &= \left(-1 + \frac{1}{e} + 1 \right) + (e - 1 - 1) \\
 &= \frac{1}{e} + e - 2 \quad \text{답 } \frac{1}{e} + e - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0886 \quad 2x + 3 = t \text{로 놓으면} \quad 2 \frac{dx}{dt} &= 1 \\
 \text{또한, } x=0 \text{일 때 } t=3, x=1 \text{일 때 } t=5 \text{이므로} \\
 \int_0^1 (2x+3)^3 dx &= \int_3^5 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{8} t^4 \right]_3^5 \\
 &= \frac{1}{8} (625 - 81) = 68 \quad \text{답 } 68
 \end{aligned}$$

0887 $x+2=t$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=2$, $x=2$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{x+2} dx &= \int_2^4 \sqrt{t} dt = \int_2^4 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{4}{3}(4-\sqrt{2})\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$

0888 $x^2-1=t$ 로 놓으면 $2x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 x(x^2-1)^2 dx &= \int_0^3 t^2 \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{6} t^3 \right]_0^3 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{2}$

0889 $2x^2+1=t$ 로 놓으면 $4x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{2x^2+1} dx &= \int_1^3 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{4} dt = \left[\frac{1}{4} \ln |t| \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4} \ln 3\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4} \ln 3$

0890 $x^2+3=t$ 로 놓으면 $2x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=3$, $x=1$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{x^2+3} dx &= \int_3^4 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \int_3^4 \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_3^4 = \frac{8}{3} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{3} - \sqrt{3}$

0891 $\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0892 $\cos x=t$ 로 놓으면 $-\sin x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\pi$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx &= \int_1^{-1} t^2 \cdot (-1) dt \\ &= \int_{-1}^1 t^2 dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

0893 $x^2=t$ 로 놓으면 $2x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^{x^2} dx &= \int_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{2} e^t \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{2}(e^4-1)\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}(e^4-1)$

0894 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0895 $x=\sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0896 $x=\sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

0897 $x=\tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2 \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

0898 $x=2\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=2$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{x^2+2^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2^2 \tan^2 \theta + 2^2} \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sec^2 \theta}{4 \sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{8}$

0899 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e \ln x dx &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= e - \left[x \right]_1^e = e - (e - 1) = 1\end{aligned}$$

답 1

0900 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^2 x e^x dx &= \left[x e^x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - \left[e^x \right]_0^2 \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1\end{aligned}$$

답 e^2+1

0901 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=-\cos x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\end{aligned}$$

답 1

0902 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_1^x t^2 \sin t dt = x^2 \sin x \cdots$ 답

0903 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_x^{x+1} (e^t + 1) dt$

$$\begin{aligned}&= (e^{x+1} + 1) - (e^x + 1) = e^{x+1} - e^x \\ &= e^x(e - 1) \cdots \text{답}\end{aligned}$$

0904 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2e^{2x} - 1 \cdots \text{답}$$

0905 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2 \cdots \text{답}$$

0906 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \sqrt{2} \cos x + \sin x \cdots \text{답}$$

0907 $f(t)=t+\cos t$, $F'(t)=f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (t + \cos t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[F(t) \right]_0^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \\ &= F'(0) = f(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

답 1

0908 $f(t)=e^t+2$, $F'(t)=f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (e^t + 2) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left[F(t) \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \\ &= F'(1) = f(1) \\ &= e + 2\end{aligned}$$

답 $e+2$

0909 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\ln |1+x| \right]_0^1 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

답 $\ln 2$

0910 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot (1 + 1) = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

0911 $\int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx$

$$\begin{aligned}&= \left[x - 2 \ln |x+1| \right]_1^3 \\ &= (3 - 2 \ln 4) - (1 - 2 \ln 2) \\ &= 2 - 2 \ln 2\end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0912 \quad \int_2^4 \frac{2x+1}{x^2} dx &= \int_2^4 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \left[2\ln|x| - \frac{1}{x} \right]_2^4 \\
 &= \left(2\ln 4 - \frac{1}{4} \right) - \left(2\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2\ln 2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 0913 \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\
 &= \left[\ln|x+1| - \ln|x+2| \right]_0^1 \\
 &= (\ln 2 - \ln 3) - (-\ln 2) \\
 &= 2\ln 2 - \ln 3 \\
 &= \ln \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 0914 \quad \int_0^1 (x-\sqrt{x})^2 dx &= \int_0^1 (x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0915 \quad \int_0^1 (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx \\
 &= \int_0^1 (\sqrt{x}+1)((\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + 1) dx \\
 &= \int_0^1 \{ (\sqrt{x})^3 + 1 \} dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 1) dx \\
 &= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x \right]_0^1 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0916 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x+1}{2(\sin x+1)} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2 x+1}{2(\sin x+1)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x+1} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin x+1} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x) dx \\
 &= \left[x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 0917 \quad \int_0^{\pi} \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 0918 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 0919 \quad \int_0^a \frac{1}{\sin^2 x - 1} dx &= \int_0^a \frac{1}{-\cos^2 x} dx = \int_0^a (-\sec^2 x) dx \\
 &= \left[-\tan x \right]_0^a = -\tan a \quad [60\% \text{ 배점}]
 \end{aligned}$$

따라서 $-\tan a = -1$ 이므로

$$\tan a = 1 \quad \therefore a = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right) \quad [40\% \text{ 배점}]$$

답 $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
 0920 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x - \pi)^2 dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin^2 x - 2a\pi \sin x + \pi^2) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} - 2a\pi \sin x + \pi^2 \right) dx \\
 &= \left[\frac{a^2}{2}x - \frac{a^2}{4}\sin 2x + 2a\pi \cos x + \pi^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi^3}{2} - 2a\pi = \frac{\pi}{4}(a-4)^2 + \frac{\pi^3}{2} - 4\pi
 \end{aligned}$$

답 ①

따라서 $a=4$ 일 때 주어진 정적분의 최소값은 $\frac{\pi^3}{2} - 4\pi$ 이다.

답 ②

$$\begin{aligned}
 0921 \quad \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx + \int_{\ln 2}^0 \frac{1}{e^x+1} dx \\
 &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx - \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1} dx \\
 &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx \\
 &= \int_0^{\ln 2} (e^x-1) dx = \left[e^x - x \right]_0^{\ln 2} \\
 &= (2 - \ln 2) - 1 = 1 - \ln 2
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0922 \quad \int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+4e^x+4} dx &= \int_{-1}^0 \sqrt{(e^x+2)^2} dx \\
 &= \int_{-1}^0 (e^x+2) dx = \left[e^x + 2x \right]_{-1}^0 \\
 &= 1 - (e^{-1} - 2) = 3 - \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 0923 \quad \int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1)dx &= \int_0^1 (8^x-1)dx \\
 &= \left[\frac{8^x}{\ln 8} - x \right]_0^1 \\
 &= \frac{8}{\ln 8} - 1 - \frac{1}{\ln 8} \\
 &= \frac{7}{\ln 8} - 1
 \end{aligned}$$

따라서 $a=7$, $b=1$ 이므로
 $a+b=8$

답 8

$$\begin{aligned}
 0924 \quad f'(x) &= 2^x + \frac{1}{x} \text{이므로} & [40\% \text{ 배점}] \\
 \int_1^2 f'(x)dx &= \int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \ln |x| \right]_1^2 \\
 &= \left(\frac{4}{\ln 2} + \ln 2 \right) - \frac{2}{\ln 2} \\
 &= \frac{2}{\ln 2} + \ln 2 & [60\% \text{ 배점}]
 \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{\ln 2} + \ln 2$

0925 x^2 은 우함수, $\sin x$ 는 기함수이므로 $x^2 \sin x$ 는 기함수이고,
 $\cos 2x$ 는 우함수이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \sin x + \cos 2x) dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos 2x dx \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = 0 & \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

0926 e^{x^2} 은 우함수이므로 $x^2 e^{x^2}$ 은 우함수, $x^3 e^{x^2}$, $x e^{x^2}$ 은 기함수이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-2}^2 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)e^{x^2} dx &= 2 \int_0^2 (3x^2 + 1)e^{x^2} dx \\
 & \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

0927 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ 으로 놓으면

$$f(-x) = 3^{-x} + 3^x = f(x)$$

이므로 $3^x + 3^{-x}$ 은 우함수이다.

또, $g(x) = 5^x - 5^{-x}$ 으로 놓으면

$$g(-x) = 5^{-x} - 5^x = -(5^x - 5^{-x}) = -g(x)$$

이므로 $5^x - 5^{-x}$ 은 기함수이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-1}^1 (3^x + 5^x + 3^{-x} - 5^{-x}) dx &= 2 \int_0^1 (3^x + 3^{-x}) dx = 2 \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right]_0^1 \\
 &= 2 \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{3 \ln 3} \right) \\
 &= \frac{16}{3 \ln 3} & \text{답 ⑤}
 \end{aligned}$$

$$0928 \quad 5-2x=t \text{로 놓으면} \quad -2 \frac{dx}{dt} = 1$$

또한, $x=1$ 일 때 $t=3$, $x=2$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx &= \int_3^1 \frac{1}{t^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) dt = \int_1^3 \frac{1}{2t^2} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2t} \right]_1^3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} & \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

$$0929 \quad x^2+x+1=t \text{로 놓으면} \quad (2x+1) \frac{dx}{dt} = 1$$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=2$ 일 때 $t=7$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx &= \int_1^7 \frac{2}{t} dt = \left[2 \ln |t| \right]_1^7 \\
 &= 2 \ln 7 & \text{답 } 2 \ln 7
 \end{aligned}$$

$$0930 \quad 1-x=t \text{로 놓으면} \quad -\frac{dx}{dt} = 1$$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx &= \int_1^0 (1-t) \sqrt{t} \cdot (-1) dt \\
 &= \int_0^1 (1-t) \sqrt{t} dt = \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}) dt \\
 &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} & \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

0931 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$\cos x = t \text{로 놓으면} \quad -\sin x \frac{dx}{dt} = 1$$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx &= \int_1^0 (1 - t^2) \cdot (-1) dt \\
 &= \int_0^1 (1 - t^2) dt \\
 &= \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} & \text{답 } \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$0932 \quad \cos x = t \text{로 놓으면} \quad -\sin x \frac{dx}{dt} = 1$$

또한, $x = -\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$, $x=0$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^3 x) \sin x dx &= \int_0^1 (1 - t^3) \cdot (-1) dt \\
 &= \int_0^1 (t^3 - 1) dt = \left[\frac{1}{4} t^4 - t \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} & \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

0933 $e^x=t$ 로 놓으면 $e^x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\ln 3$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-2e^x}{e^x+1} dx &= \int_1^3 \frac{e^x(e^x-2)}{e^x+1} dx \\ &= \int_1^3 \frac{t-2}{t+1} dt \\ &= \int_1^3 \left(1 - \frac{3}{t+1}\right) dt \\ &= \left[t - 3 \ln |t+1| \right]_1^3 \\ &= (3-3 \ln 4) - (1-3 \ln 2) \\ &= 2-3 \ln 2\end{aligned}$$

답 ②

0934 $\int_0^2 (x+1)^2 e^{x^2} dx - \int_0^2 (x-1)^2 e^{x^2} dx$

$$= \int_0^2 e^{x^2} \{(x+1)^2 - (x-1)^2\} dx = \int_0^2 4xe^{x^2} dx \quad [40\% \text{ 배점}]$$

이 때, $x^2=t$ 로 놓으면 $2x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=4$ 이므로 [30% 배점]

$$\begin{aligned}\int_0^2 4xe^{x^2} dx &= \int_0^4 2e^t dt = \left[2e^t \right]_0^4 \\ &= 2(e^4 - 1)\end{aligned}$$

[30% 배점]
답 2(e^4-1)

0935 $e^x=t$ 로 놓으면 $e^x \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=-2$ 일 때 $t=e^{-2}$, $x=2$ 일 때 $t=e^2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \frac{1}{e^x+1} dx &= \int_{e^{-2}}^{e^2} \frac{1}{t(t+1)} dt \\ &= \int_{e^{-2}}^{e^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[\ln |t| - \ln |t+1| \right]_{e^{-2}}^{e^2} \\ &= \{\ln e^2 - \ln (e^2+1)\} - \{\ln e^{-2} - \ln (e^{-2}+1)\} \\ &= 2 - \ln (e^2+1) + 2 + \ln \frac{e^2+1}{e^2} \\ &= 4 + \ln \frac{e^2+1}{e^2(e^2+1)} = 4 + (-2) = 2\end{aligned}$$

답 ②

0936 $\ln x-1=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=\frac{1}{e}$ 일 때 $t=-2$, $x=1$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x(\ln x-1)^3} dx &= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^3} dt = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_{-2}^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{8} \right) \\ &= -\frac{3}{8}\end{aligned}$$

답 ③

0937 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x^2 + (\ln x)^2}{x} dx &= \int_0^1 (2t+t^2) dt \\ &= \left[t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ②

0938 $a-x=t$ 로 놓으면 $-\frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=a$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{a}{2}$ 일 때 $t=\frac{a}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a}{2}}^a f(a-x) dx &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(t) \cdot (-1) dt = -\int_0^{\frac{a}{2}} f(t) dt \\ \therefore \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_a^{\frac{a}{2}} f(a-x) dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx - \int_0^{\frac{a}{2}} f(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx - \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx = 0\end{aligned}$$

답 ①

0939 $3x+6=t$ 로 놓으면 $3 \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=-2$ 일 때 $t=0$, $x=-1$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} f(3x+6) dx &= \int_0^3 f(t) \cdot \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 = 1\end{aligned}$$

답 1

0940 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\pi} \{f(x) + f(-x)\} dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = 2\end{aligned}$$

답 ③

[참고] $\int_0^a \{f(x) + f(-x)\} dx$

$$= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx \quad \dots\dots ⑦$$

이 때, $\int_0^a f(-x) dx$ 에서 $-x=t$ 로 놓으면 $-\frac{dx}{dt}=1$ 이고

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=a$ 일 때 $t=-a$ 이므로

$$\int_0^a f(-x) dx = -\int_0^{-a} f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx \\
&= \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(t) dt \\
&= \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx \\
&= \int_{-a}^a f(x) dx \\
&\therefore \int_0^a \{f(x) + f(-x)\} dx = \int_{-a}^a f(x) dx \quad (\because \textcircled{7})
\end{aligned}$$

0941 $x = 2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=2$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

따라서 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이가 π 이므로

$$\pi r^2 = \pi \quad \therefore r = 1 \quad (\because r > 0) \quad \text{답 ②}$$

다른 풀이 $y = \sqrt{4-x^2}$ 의 그래프는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원의 위쪽 반원이므로 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ 의 값은 반지름의 길이가 2인 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이다.

$$\therefore \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \pi$$

따라서 $\pi r^2 = \pi$ 이므로 $r = 1$

0942 $x = 3 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 3 \cos \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{3}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3 \cos \theta}{\sqrt{9(1-\sin^2 \theta)}} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3 \cos \theta}{\sqrt{9 \cos^2 \theta}} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3 \cos \theta}{3 \cos \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

답 ③

0943 $2x - x^2 = 1 - (1 - 2x + x^2) = 1 - (x-1)^2$

이므로 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx$

이 때, $x-1 = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $x=1$ 일 때 $\theta=0$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0944 $x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2(1+\tan^2 \theta)} \cdot a \sec^2 \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta = \left[\frac{1}{a} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4a}
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a} = \pi$ 이므로 $a = \frac{1}{4}$

답 ①

0945 $x = \sqrt{3} \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{3} \sec^2 \theta$

또한, $x=-1$ 일 때 $\theta = -\frac{\pi}{6}$, $x=1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{3+x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3(1+\tan^2 \theta)} \cdot \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta}{3 \sec^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} d\theta \\
&= \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9} \pi
\end{aligned}$$

답 ⑤

0946 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-\sin x \frac{dx}{dt} = 1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_1^0 \frac{1}{1+t^2} dt \quad [40\% \text{ 배점}]$$

이 때, $t=\tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta} = \sec^2 \theta$

또한, $t=0$ 일 때 $\theta=0$, $t=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로 [30% 배점]

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \quad [30\% \text{ 배점}] \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0947 $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면
 $f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx &= \left[-(x-1)e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\ &= (-1) - \left[e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -1 - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

답 ①

0948 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ②

0949 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x + \cos x$ 로 놓으면
 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x + \sin x$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{2\pi}^{3\pi} x(\sin x + \cos x) dx \\ &= \left[x(-\cos x + \sin x) \right]_{2\pi}^{3\pi} - \int_{2\pi}^{3\pi} (-\cos x + \sin x) dx \\ &= -3\pi \cos 3\pi + 2\pi \cos 2\pi - \left[-\sin x - \cos x \right]_{2\pi}^{3\pi} \\ &= 3\pi + 2\pi + \cos 3\pi - \cos 2\pi \\ &= 5\pi - 2 \end{aligned}$$

답 ⑤

0950 $\int_0^1 f(x) dx - \int_{\pi}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\pi} f(x) dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{\pi} x \cos 2x dx \quad [30\% \text{ 배점}] \end{aligned}$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos 2x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} x \cos 2x dx &= \left[\frac{1}{2}x \sin 2x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= - \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi} \\ &= - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 0 \quad [40\% \text{ 배점}] \end{aligned}$$

답 0

0951 $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면
 $f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \quad \cdots \cdots ㉠ \end{aligned}$$

이 때, $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\sin x, v(x) = e^x \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx &= \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^x \sin x) dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad \cdots \cdots ㉡ \end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx &= e^{\frac{\pi}{2}} - \left(-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \right) \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx &= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \quad \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로 $a+b=1$

답 1

0952 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면
 $f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx &= \left[x^2 \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x dx \\ &= -2 \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad \cdots \cdots ㉠ \end{aligned}$$

이 때, $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1, v(x) = -\cos x \\ \therefore \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx \\ &= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} = \pi \quad \cdots \cdots ㉡ \end{aligned}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2\pi$$

답 ①

0953 $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x, g(x)=e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx &= \left[x^2 e^x \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 2x e^x dx \\ &= (\ln 2)^2 \cdot 2 - 2 \int_0^{\ln 2} x e^x dx \quad \dots\dots ㉔ \end{aligned}$$

이 때, $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\ln 2} x e^x dx &= \left[x e^x \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx \\ &= \ln 2 \cdot 2 - \left[e^x \right]_0^{\ln 2} = 2 \ln 2 - (2 - 1) \\ &= 2 \ln 2 - 1 \quad \dots\dots ㉔ \end{aligned}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx &= (\ln 2)^2 \cdot 2 - 2(2 \ln 2 - 1) \\ &= 2(\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2 \end{aligned}$$

답 ①

0954 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^2 x - \sin^2 x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx$

$$|\cos 2x| = \begin{cases} \cos 2x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \\ -\cos 2x & (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

0955 $|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{|x-1|} dx &= \int_0^1 \sqrt{-x+1} dx + \int_1^2 \sqrt{x-1} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(-x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$

0956 함수 $y=|\cos x|$ 의 주기가 π 이므로

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\pi} |\cos x| dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

답 ②

0957 $\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)

..... ㉔

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$

이것을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^2 (e^t + k) dt &= k \\ \left[e^t + kt \right]_0^2 &= k, \quad e^2 + 2k - 1 = k \\ \therefore k &= -e^2 + 1 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=e^x-e^2+1$ 이므로

$$f(2)=e^2-e^2+1=1$$

답 ①

0958 $\int_0^{\pi} f(t) dt = k$ (k 는 상수)

..... ㉔

로 놓으면 $f(x)=\cos x+2x+k$

이것을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\cos t + 2t + k) dt &= k \\ \left[\sin t + t^2 + kt \right]_0^{\pi} &= k, \quad \pi^2 + k\pi = k \\ k(1-\pi) &= \pi^2 \quad \therefore k = \frac{\pi^2}{1-\pi} \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=\cos x+2x+\frac{\pi^2}{1-\pi}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + \frac{\pi^2}{1-\pi} = \frac{\pi}{1-\pi}$$

답 ②

0959 $xf(x)=2x+\int_1^x f(t) dt$

..... ㉔

㉔의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) + xf'(x) &= 2 + f(x) \\ xf'(x) &= 2 \quad \therefore f'(x) = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| + C$$

㉔의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=2$ 이므로

$$f(1)=C=2$$

따라서 $f(x)=2 \ln |x| + 2$ 이므로

$$f(e)=2+2=4$$

답 ②

0960 $f(x)=x \cos x + \int_{\pi}^x t f(t) dt$

..... ㉔

㉔의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \cos x - x \sin x + xf(x)$$

㉔의 양변에 $x=\pi$ 를 대입하면 $f(\pi)=-\pi$

$$\begin{aligned} \therefore f'(\pi) &= -1 + \pi f(\pi) = -1 + \pi \cdot (-\pi) \\ &= -\pi^2 - 1 \end{aligned}$$

답 ①

0961 $\int_1^x (x+t)f(t)dt = e^{2x} + x - e^2 - 1$ 에서

$$x \int_1^x f(t)dt + \int_1^x tf(t)dt = e^{2x} + x - e^2 - 1$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) + xf(x) = 2e^{2x} + 1$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt + 2xf(x) = 2e^{2x} + 1$$

위의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2f(1) = 2e^2 + 1 \quad \therefore f(1) = \frac{2e^2 + 1}{2}$$

0962 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (1 + 2 \sin x) \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$	...	(π)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이므로 극대값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin t) \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + 2 \sin t \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin 2t) \, dt \\ &= \left[\sin t - \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

0963 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (1 - x^2)e^x = (1 + x)(1 - x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대, $x=-1$ 에서 극소이므로

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad b = -1 \\ \therefore ab &= -1 \end{aligned}$$

답 ⑤

답 ②

답 -1

0964 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + 1 + \frac{2}{x+1} - \left(x + \frac{2}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + x - 2}{x(x+1)} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 1 \quad (\because x > 0)$$

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 최소값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^2 \left(t + \frac{2}{t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + 2 \ln |t| \right]_1^2 \\ &= 2 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

답 ⑤

0965 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2 - e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad e^x = 2 \quad \therefore x = \ln 2$$

[30% 배점]

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘

[20% 배점]

따라서 $f(x)$ 는 $x = \ln 2$ 에서 극대이면서 최대이고, 최대값은

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= \int_1^{\ln 2} (2 - e^t) dt = \left[2t - e^t \right]_1^{\ln 2} \\ &= 2 \ln 2 - 2 - (2 - e) \\ &= 2 \ln 2 - 4 + e \end{aligned}$$

[30% 배점]

즉, $a = \ln 2$, $b = 2 \ln 2 - 4 + e$ 이므로

$$b - 2a = 2 \ln 2 - 4 + e - 2 \ln 2 = e - 4$$

[20% 배점]

답 $e - 4$

0966 $f(t) = 1 - \tan t$, $F'(t) = f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^{2x} (1 - \tan t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[F(t) \right]_{-x}^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2x) - F(-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2x) - F(0) - \{F(-x) - F(0)\}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2x) - F(0)}{2x} \cdot 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(-x) - F(0)}{-x} \\ &= 2F'(0) + F'(0) = 3F'(0) \\ &= 3f(0) = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

답 ③

0967 $f(t)=1+\cos^4 t$, $F'(t)=f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x-\pi} \int_{\pi}^x (1+\cos^4 t) dt &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x-\pi} \left[F(t) \right]_{\pi}^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi} \\ &= F'(\pi)=f(\pi) \\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

답 ⑤

0968 $f(t)=e^{t^2}$, $F'(t)=f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left[F(t) \right]_1^{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= F'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f(1) = \frac{e}{2}\end{aligned}$$

답 ②

0969 $F'(t)=f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2e}^{2e+h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(t) \right]_{2e}^{2e+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2e+h)-F(2e)}{h} \\ &= F'(2e)=f(2e) \\ &= e^{2e} \cdot \ln \frac{2e}{2} = e^{2e}\end{aligned}$$

답 ②

0970 $f(x)=x \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $F'(x)=f(x)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\pi-h}^{\pi+h} x \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_{\pi-h}^{\pi+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h)-F(\pi-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F(\pi+h)-F(\pi)\}-\{F(\pi-h)-F(\pi)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h)-F(\pi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi-h)-F(\pi)}{-h} \\ &= F'(\pi)+F'(\pi)=2F'(\pi) \\ &= 2f(\pi)=2 \cdot \pi \cdot (-1)=-2\pi\end{aligned}$$

답 ①

0971 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3+1^3} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n^3} \right)$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx\end{aligned}$$

이 때, $x^3=t$ 로 놓으면 $3x^2 \frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=1$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \frac{1}{3} \left[\ln |1+t| \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$$

답 ③

0972 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{2n} \right)$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\end{aligned}$$

답 ②

0973 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{2n}{n}\right) \right\}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^2 = \frac{e^4-1}{4}\end{aligned}$$

답 ④

0974 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2-k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

이 때, $x=\sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

답 ④

0975 $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$ 에서 k 대신 1, 2, 3, ..., n

을 대입하여 각 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &< \int_1^2 \frac{1}{k} dx + \int_2^3 \frac{1}{k} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{k} dx\end{aligned}$$

$$\int_1^{\lfloor n+1 \rfloor} \frac{1}{x} dx < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

$$\left[\ln |x| \right]_1^{n+1} < \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} x \right]_k^{k+1}$$

$$\boxed{\ln(n+1)} < \sum_{k=1}^n \boxed{\frac{1}{k}}$$

이 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1)$ 이 발산하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 도 발산한다. 답 ③

0976 $x \geq 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로

$$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $x \geq 0$ 에서 $f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ 이므로 상수 $t(t \geq 0)$ 에 대하여

$$\int_0^t f'(x) dx \leq \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$$

$$\left[f(x) \right]_0^t \leq \left[\sqrt{x+1} \right]_0^t$$

$$f(t) \leq \sqrt{t+1} - 1$$

$$\therefore f(x) \leq \sqrt{x+1} - 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x+1} - 1$ 이므로

$$0 \leq f(8) \leq 2$$

따라서 $f(8)$ 의 최대값은 2, 최소값은 0이므로 그 합은 2이다. 답 2

0977 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 일 때 $\sin x \leq \cos x$

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{일 때} \quad \cos x \leq \sin x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x * \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

0978 $f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x)$

$$= \cos(\sin x) = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^2 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^2 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2 \left\{ \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right\} \\ &= 2 \int_1^2 f(x) dx \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\textbf{0979} \quad a_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos kx dx = \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{40} k^2 a_k &= \sum_{k=1}^{40} k^2 \sin \frac{k\pi}{2} \\ &= 1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \dots + 37^2 - 39^2 \\ &= (1^2 + 5^2 + \dots + 37^2) - (3^2 + 7^2 + \dots + 39^2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (4k-3)^2 - \sum_{k=1}^{10} (4k-1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{ (4k-3)^2 - (4k-1)^2 \} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (-16k+8) = -16 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 8 \cdot 10 \\ &= -800 \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

$$\textbf{0980} \quad g(x) = \frac{1}{f'(x)} \text{이므로} \quad \frac{1}{g(x)} = f'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^5 \frac{1}{f(x)g(x)} dx &= \int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ &= \left[\ln |f(x)| \right]_1^5 \\ &= \ln |f(5)| - \ln |f(1)| \\ &= \ln 4 - \ln 2 \\ &= 2 \ln 2 - \ln 2 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\therefore k=2$$

답 2

$$\textbf{0981} \quad x+1=t \text{로 놓으면} \quad \frac{dx}{dt} = 1$$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_0^2 e^x f(x+1) dx = \int_1^3 e^{t-1} f(t) dt$$

이 때, $1 \leq t \leq 3$ 에서 $f(t) = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 e^{t-1} f(t) dt &= \int_1^3 2e^{t-1} dt = \left[2e^{t-1} \right]_1^3 \\ &= 2e^2 - 2 \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 함수 $y=f(x+1)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x+1) = \begin{cases} 2x+2 & (-1 \leq x \leq 0) \\ 2 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 e^x f(x+1) dx &= 2 \int_0^2 e^x dx = 2 \left[e^x \right]_0^2 \\ &= 2e^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\textbf{0982} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{이 때, } -x=u \text{로 놓으면} \quad -\frac{dx}{du} = 1$$

또한, $x=-1$ 일 때 $u=1$, $x=0$ 일 때 $u=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(x)dx &= \int_1^0 f(-u) \cdot (-1)du \\ &= \int_0^1 f(-u)du = \int_0^1 f(-x)dx \quad \cdots \cdots \textcircled{L}\end{aligned}$$

㉔을 ㉓에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_0^1 f(-x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 \{f(-x) + f(x)\}dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) dx = \int_0^1 x^2 (e^x + e^{-x}) dx\end{aligned}$$

이 때, $g(x)=x^2$, $h'(x)=e^x+e^{-x}$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2x, \quad h(x) = e^x - e^{-x} \\ \therefore \int_0^1 x^2 (e^x + e^{-x}) dx \\ &= \left[x^2 (e^x - e^{-x}) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x (e^x - e^{-x}) dx \\ &= e - \frac{1}{e} - 2 \int_0^1 x (e^x - e^{-x}) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{L}\end{aligned}$$

이 때, $u(x)=x$, $v'(x)=e^x-e^{-x}$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}u'(x) &= 1, \quad v(x) = e^x + e^{-x} \\ \therefore \int_0^1 x (e^x - e^{-x}) dx &= \left[x (e^x + e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx \\ &= \left(e + \frac{1}{e} \right) - \left[e^x - e^{-x} \right]_0^1 \\ &= e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \quad \cdots \cdots \textcircled{L}\end{aligned}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_0^1 x^2 (e^x + e^{-x}) dx \\ &= e - \frac{1}{e} - \frac{4}{e} = e - \frac{5}{e} \quad \text{답 ④}\end{aligned}$$

0983 $\neg$. $g_1(x) = f_1(x) - f_0(x)$

$$\begin{aligned}&= \sin x + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_0(x) dx - \sin x \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx\end{aligned}$$

이 때, $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}u'(x) &= 1, \quad v(x) = -\cos x \\ \therefore g_1(x) &= 2 \left[\left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos x) dx \right] \\ &= 2 \left(-\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \pi + \sqrt{2} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. g_n(x) &= f_n(x) - f_{n-1}(x) \\ &= \left(\sin x + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_{n-1}(x) dx \right) \\ &\quad - \left(\sin x + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_{n-2}(x) dx \right) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \{ f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x) \} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x g_{n-1}(x) dx\end{aligned}$$

㉔. $\neg$ 에서 $g_n(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x g_{n-1}(x) dx$ 이므로 $g_n(x)$ 는 상수이다.

$$\begin{aligned}\therefore g_n(x) &= 2 g_{n-1}(x) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx \\ &= 2 g_{n-1}(x) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 g_{n-1}(x)\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{g_n(x)\}$ 는 공비가 $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$ 인 등비수열이다.

이상에서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

0984 $x^2=t$ 로 놓으면 $2x \frac{dx}{dt} = 1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\sqrt{\pi}$ 일 때 $t=\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \sin x^2 dx &= \int_0^{\pi} t \sin t \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t \sin t dt\end{aligned}$$

이 때, $f(t)=t$, $g'(t)=\sin t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(t) &= 1, \quad g(t) = -\cos t \\ \therefore \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t \sin t dt &= \frac{1}{2} \left\{ \left[-t \cos t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos t) dt \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\sin t \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \quad \text{답 ④}\end{aligned}$$

0985 $f(g(x)) = \int_0^x f(t)g(t)dt - xe^x + 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(g(x))g'(x) &= f(x)g(x) - e^x - xe^x \\ &= f(x)g(x) - (1+x)e^x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이 때, $f(x)=ax+b$, $g(x)=e^x$ 에서

$$f'(x)=a, \quad g'(x)=e^x$$

이므로 ㉑에 대입하면

$$\begin{aligned}ae^x &= (ax+b)e^x - (1+x)e^x \\ &= \{(a-1)x + (b-1)\}e^x \\ a-1 &= 0, \quad b-1 = a \\ \therefore a &= 1, \quad b = 2\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=x+2$ 이므로

$$f(2) = 2+2 = 4$$

답 ①

0986 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 1 - \ln x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

x	(0)	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 극대이고, 극대값은

$$\begin{aligned} f(e) &= \int_1^e (1 - \ln t) dt \\ &= \left[t \right]_1^e - \int_1^e \ln t dt \\ &= e - 1 - \int_1^e \ln t dt \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$u(t) = \ln t$, $v'(t) = 1$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{t}, \quad v(t) = t \\ \therefore \int_1^e \ln t dt &= \left[t \ln t \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \cdot t dt \\ &= e - \left[t \right]_1^e \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$f(e) = e - 1 - 1 = e - 2$$

따라서 $a = e$, $b = e - 2$ 이므로

$$a - b = 2 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \textbf{0987} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} e^{\frac{1}{n}} + \frac{4}{n^3} e^{\frac{2}{n}} + \frac{9}{n^3} e^{\frac{3}{n}} + \dots + \frac{n^2}{n^3} e^{\frac{n}{n}} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 e^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \int_0^1 x^2 e^x dx \end{aligned}$$

이 때, $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x, \quad g(x) = e^x \\ \therefore \int_0^1 x^2 e^x dx &= \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx \\ &= e - 2 \int_0^1 x e^x dx \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 때, $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1, \quad v(x) = e^x \\ \therefore \int_0^1 x e^x dx &= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2 \cdot 1 = e - 2 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0988 $\int_{-a}^a (b-x)f'(x)dx$ 에서 $u(x) = b-x$, $v'(x) = f'(x)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= -1, \quad v(x) = f(x) \\ \therefore \int_{-a}^a (b-x)f'(x)dx \\ &= \left[(b-x)f(x) \right]_{-a}^a + \int_{-a}^a f(x)dx \end{aligned}$$

조건 ㉠에 의하여 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= (b-a)f(a) - (b+a)f(-a) \\ &= b-a+b+a \\ &= 2b \end{aligned} \quad (\because \text{조건 ㉠에서 } f(-a) = -f(a)) \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0989 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\cos x \frac{dx}{dt} = 1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 [20% 배점]

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2t}{1+t^2} dt \end{aligned} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

이 때, $t^2 = u$ 로 놓으면 $2t \frac{dt}{du} = 1$

또한, $t=0$ 일 때 $u=0$, $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 $u=\frac{1}{2}$ 이므로 [20% 배점]

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2t}{1+t^2} dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+u} du \\ &= \left[\ln |1+u| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln \frac{3}{2} \end{aligned} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

$$\text{답 } \ln \frac{3}{2}$$

0990 $x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로 [20% 배점]

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (1+x)\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin \theta)\sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin \theta)\cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

이 때, $\cos \theta = t$ 로 놓으면

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 1$$

또한, $\theta = 0$ 일 때 $t = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t = 0$ 이므로 ㉠에서

[20% 배점]

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \int_1^0 t^2 \cdot (-1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta + \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

[30% 배점]

답 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$

0991 $\int_0^1 (e^x - ax)^2 dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (e^{2x} - 2axe^x + a^2x^2) dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} + a^2x^2) dx - 2a \int_0^1 xe^x dx \end{aligned}$$

..... ㉠ [20% 배점]

이 때, $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면
 $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 xe^x dx &= \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

..... ㉡ [30% 배점]

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x - ax)^2 dx &= \int_0^1 (e^{2x} + a^2x^2) dx - 2a \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{a^2}{3} x^3 \right]_0^1 - 2a \\ &= \frac{1}{2} e^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{1}{2} - 2a \\ &= \frac{1}{3} (a - 3)^2 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

[40% 배점]

따라서 $a = 3$ 일 때 주어진 정적분의 값이 최소이다. [10% 배점]

답 3

0992 $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} |x| \sin x dx = \int_{-\pi}^0 (-x) \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

$$= -\int_{-\pi}^0 x \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

[30% 배점]

이 때, $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = -\cos x$$

[30% 배점]

$$\begin{aligned} & \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - \int_{-\pi}^0 x \sin x dx \\ &= \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx \\ &\quad - \left[-x \cos x \right]_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 (-\cos x) dx \\ &= - \left[-\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi + \left[-\sin x \right]_{-\pi}^0 \\ &= -(-1) - \pi = 1 - \pi \end{aligned}$$

[40% 배점]

답 $1 - \pi$

0993 $\int_1^e f(t) \ln t dt = k$ (k 는 상수)

..... ㉠

로 놓으면 $f(x) = x - k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e (t - k) \ln t dt = k \quad \text{..... ㉡} \quad [20\% \text{ 배점}]$$

이 때, $u(t) = \ln t$, $v'(t) = t - k$ 로 놓으면

$$u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = \frac{1}{2} t^2 - kt \quad [20\% \text{ 배점}]$$

$$\begin{aligned} & \therefore \int_1^e (t - k) \ln t dt \\ &= \left[\ln t \left(\frac{1}{2} t^2 - kt \right) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} t^2 - kt \right) dt \\ &= \frac{1}{2} e^2 - ke - \int_1^e \left(\frac{1}{2} t - k \right) dt \\ &= \frac{1}{2} e^2 - ke - \left[\frac{1}{4} t^2 - kt \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} e^2 - ke - \frac{1}{4} e^2 + ke + \frac{1}{4} - k \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} - k \end{aligned}$$

..... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} - k = k \quad \therefore k = \frac{1}{8} (e^2 + 1) \quad [30\% \text{ 배점}]$$

따라서 $f(x) = x - \frac{e^2 + 1}{8}$ 이므로

$$f(0) = -\frac{e^2 + 1}{8} \quad [30\% \text{ 배점}]$$

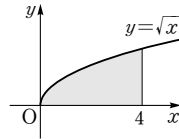
답 $-\frac{e^2 + 1}{8}$

IV. 적분법

09 정적분의 활용

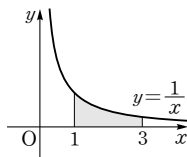
$$\begin{aligned} 0994 \quad S &= \int_0^4 \sqrt{x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{16}{3}$



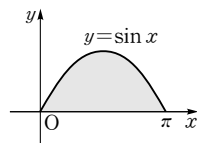
$$\begin{aligned} 0995 \quad S &= \int_1^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_1^3 = \ln 3 \end{aligned}$$

답 $\ln 3$



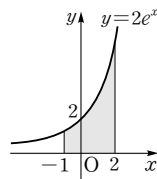
$$\begin{aligned} 0996 \quad S &= \int_0^\pi \sin x dx \\ &= \left[-\cos x \right]_0^\pi = 2 \end{aligned}$$

답 2



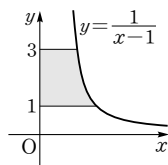
$$\begin{aligned} 0997 \quad S &= \int_{-1}^2 2e^x dx = 2 \left[e^x \right]_{-1}^2 \\ &= 2 \left(e^2 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

답 $2 \left(e^2 - \frac{1}{e} \right)$



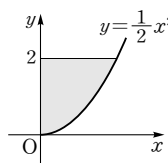
$$\begin{aligned} 0998 \quad y &= \frac{1}{x-1} \text{에서} \quad y(x-1)=1 \\ yx &= y+1 \\ \therefore x &= 1 + \frac{1}{y} \\ \therefore S &= \int_1^3 \left(1 + \frac{1}{y} \right) dy \\ &= \left[y + \ln |y| \right]_1^3 = 2 + \ln 3 \end{aligned}$$

답 $2 + \ln 3$



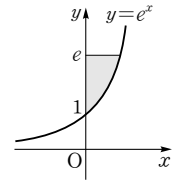
$$\begin{aligned} 0999 \quad y &= \frac{1}{2} x^2 \text{에서} \quad x^2 = 2y \\ \therefore x &= \sqrt{2y} \\ \therefore S &= \int_0^2 \sqrt{2y} dy \\ &= \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{8}{3}$



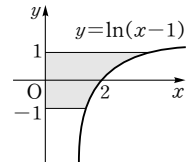
$$\begin{aligned} 1000 \quad y &= e^x \text{에서} \quad x = \ln y \\ \therefore S &= \int_1^e \ln y dy \\ &= \left[y \ln y - y \right]_1^e = 1 \end{aligned}$$

답 1



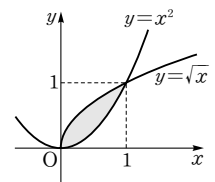
$$\begin{aligned} 1001 \quad y &= \ln(x-1) \text{에서} \\ x-1 &= e^y \quad \therefore x = e^y + 1 \\ \therefore S &= \int_{-1}^1 (e^y + 1) dy \\ &= \left[e^y + y \right]_{-1}^1 \\ &= e - \frac{1}{e} + 2 \end{aligned}$$

답 $e - \frac{1}{e} + 2$



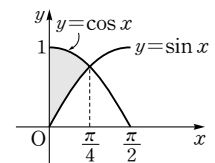
$$\begin{aligned} 1002 \quad &\text{두 곡선의 교점의 } x \text{좌표는 } x^2 = \sqrt{x} \\ &\text{에서} \\ x^4 &= x, \quad x(x^3 - 1) = 0 \\ x(x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ 일 때 } x^2 &\leq \sqrt{x} \text{ 이므로} \\ S &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$



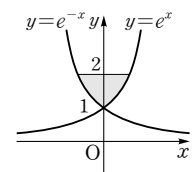
$$\begin{aligned} 1003 \quad &\text{두 곡선의 교점의 } x \text{좌표는} \\ &\sin x = \cos x \text{에서} \\ x &= \frac{\pi}{4} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right) \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 일 때 } \sin x &\leq \cos x \text{ 이므로} \\ S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\ &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

답 $\sqrt{2} - 1$



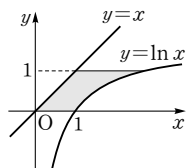
$$\begin{aligned} 1004 \quad y &= e^x \text{에서} \quad x = \ln y \\ y &= e^{-x} \text{에서} \quad -x = \ln y \\ \therefore x &= -\ln y \\ 1 \leq y \leq 2 \text{ 일 때 } -\ln y &\leq \ln y \text{ 이므로} \\ S &= \int_1^2 \{ \ln y - (-\ln y) \} dy \\ &= \int_1^2 2 \ln y dy = 2 \left[y \ln y - y \right]_1^2 \\ &= 2(2 \ln 2 - 1) = 4 \ln 2 - 2 \end{aligned}$$

답 $4 \ln 2 - 2$



1005 $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$
 $0 \leq y \leq 1$ 일 때 $y \leq e^y$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (e^y - y) dy \\ &= \left[e^y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 \\ &= e - \frac{3}{2} \end{aligned}$$



답 $e - \frac{3}{2}$

1006 $V = \int_0^3 \sqrt{3-x} dx = \left[-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3$
 $= \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

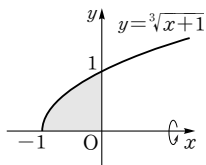
답 $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$

1007 밑면으로부터 x cm인 지점에서의 단면의 넓이가 $(e^{-x})^2 = e^{-2x}$ 이므로

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^8} \right) \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

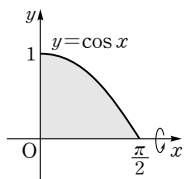
답 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^8} \right) \text{ cm}^3$

1008 $V = \pi \int_{-1}^0 y^2 dx$
 $= \pi \int_{-1}^0 (\sqrt[3]{x+1})^2 dx$
 $= \pi \int_{-1}^0 (x+1)^{\frac{2}{3}} dx$
 $= \pi \left[\frac{3}{5} (x+1)^{\frac{5}{3}} \right]_{-1}^0$
 $= \frac{3}{5} \pi$



답 $\frac{3}{5} \pi$

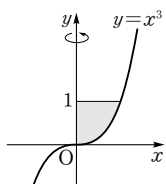
1009 $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx$
 $= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$
 $= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$
 $= \pi \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
 $= \frac{\pi^2}{4}$



답 $\frac{\pi^2}{4}$

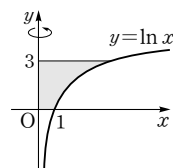
1010 $y = x^3$ 에서 $x = y^{\frac{1}{3}}$
 $\therefore V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy$
 $= \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{5} \pi$

답 $\frac{3}{5} \pi$



1011 $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$

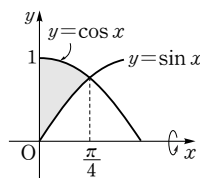
$$\begin{aligned} \therefore V &= \pi \int_0^3 x^2 dy \\ &= \pi \int_0^3 e^{2y} dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^3 = \frac{\pi}{2} (e^6 - 1) \end{aligned}$$



답 $\frac{\pi}{2} (e^6 - 1)$

1012 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 일 때 $\sin x \leq \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

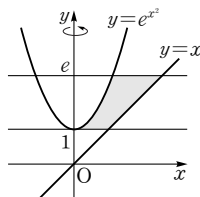


답 $\frac{\pi}{2}$

1013 $y = e^{x^2}$ 에서 $x^2 = \ln y$

$y = x$ 에서 $x^2 = y^2$
 $1 \leq y \leq e$ 일 때 $\ln y \leq y^2$ 이므로

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e (y^2 - \ln y) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} y^3 - y \ln y + y \right]_1^e \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} e^3 - e + e - \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{\pi}{3} (e^3 - 4) \end{aligned}$$



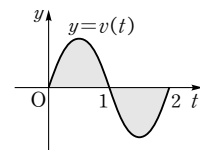
답 $\frac{\pi}{3} (e^3 - 4)$

1014 (1) 원점에서 출발하였으므로

$$\begin{aligned} x &= 0 + \int_0^1 v(t) dt \\ &= \int_0^1 \sin \pi t dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

(2) $\int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 \sin \pi t dt$
 $= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^2 = 0$

(3) $s = \int_0^2 |v(t)| dt$
 $= \int_0^2 |\sin \pi t| dt$
 $= \int_0^1 \sin \pi t dt + \int_1^2 (-\sin \pi t) dt$
 $= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 + \left[\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^2$
 $= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$



답 (1) $\frac{2}{\pi}$ (2) 0 (3) $\frac{4}{\pi}$

1015 $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 4t$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (2t)^2 + (4t)^2 = 20t^2$$

$$\therefore s = \int_0^1 \sqrt{20t^2} dt = \int_0^1 2\sqrt{5}t dt = \left[\sqrt{5}t^2\right]_0^1 = \sqrt{5} \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

1016 $\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-\sin t)^2 + \cos^2 t = 1$$

$$\therefore s = \int_0^1 \sqrt{1} dt = \left[t\right]_0^1 = 1 \quad \text{답 } 1$$

1017 $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}t, \frac{dy}{dt} = t^2 - 2$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (2\sqrt{2}t)^2 + (t^2 - 2)^2 = 8t^2 + t^4 - 4t^2 + 4 = t^4 + 4t^2 + 4 = (t^2 + 2)^2$$

$$\therefore l = \int_0^1 \sqrt{(t^2 + 2)^2} dt = \int_0^1 (t^2 + 2) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + 2t\right]_0^1 = \frac{7}{3} \quad \text{답 } \frac{7}{3}$$

1018 $\frac{dx}{dt} = 3\cos t, \frac{dy}{dt} = 3\sin t$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9$$

$$\therefore l = \int_0^\pi \sqrt{9} dt = \left[3t\right]_0^\pi = 3\pi \quad \text{답 } 3\pi$$

1019 $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ 이므로

$$l = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{8}{27}(19\sqrt{19} - 1)$$

답 $\frac{8}{27}(19\sqrt{19} - 1)$

1020 $f'(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2}$ 이므로

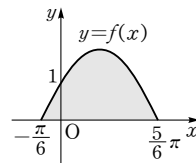
$$1 + \{f'(x)\}^2 = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2 = 1 + x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4} = x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$\therefore l = \int_1^2 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{59}{24} \quad \text{답 } \frac{59}{24}$$

1021 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

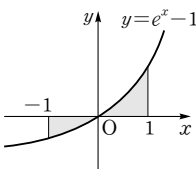
이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx = \left[-2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = 4 \quad \text{답 } 4$$



1022 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = \left[x - e^x\right]_{-1}^0 + \left[e^x - x\right]_0^1 = \frac{1}{e} + e - 2 \quad \text{답 } ①$$



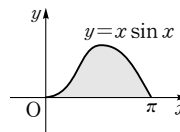
1023 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $y = x \sin x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^\pi x \sin x dx$$

이 때, $f(x) = x, g'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = -\cos x$$

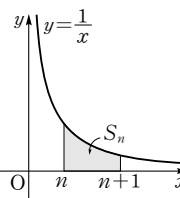
$$\therefore S = \left[-x \cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx = \pi + \left[\sin x\right]_0^\pi = \pi \quad \text{답 } ⑤$$



1024 오른쪽 그림에서

$$S_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x|\right]_n^{n+1} = \ln \frac{n+1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1 \quad \text{답 } ②$$



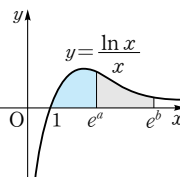
1025 곡선 $y = \frac{\ln x}{x}$ 와 x축과의 교점의 x

좌표는 $\frac{\ln x}{x} = 0$ 에서

$$\ln x = 0 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore S_1 = \int_1^{e^a} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$S_2 = \int_{e^a}^{e^b} \frac{\ln x}{x} dx$$



이 때, $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$ 이고,

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e^a$ 일 때 $t=a$, $x=e^b$ 일 때 $t=b$

이므로

$$S_1 = \int_0^a t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_2 = \int_a^b t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$S_1 = S_2 \text{에서 } \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$a^2 = b^2 - a^2, \quad b^2 = 2a^2$$

$$\therefore b = \sqrt{2}a \quad (\because 0 < a < b)$$

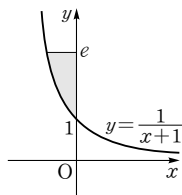
답 ①

1026 $y(x+1)=1$ 에서 $x+1=\frac{1}{y}$

$$\therefore x = \frac{1}{y} - 1$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \left| \frac{1}{y} - 1 \right| dy = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{y} \right) dy \\ &= \left[y - \ln |y| \right]_1^e = e - 2 \end{aligned}$$



답 e-2

1027 $y = \ln(a-x)$ 에서

$$a-x=e^y \quad \therefore x=a-e^y$$

오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이를 S라 하면

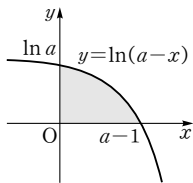
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\ln a} (a - e^y) dy = \left[ay - e^y \right]_0^{\ln a} \\ &= a \ln a - a + 1 \end{aligned}$$

따라서 $a \ln a - a + 1 = 1$ 이므로

$$a(\ln a - 1) = 0, \quad \ln a - 1 = 0 \quad (\because a > 1)$$

$$\ln a = 1 \quad \therefore a = e$$

답 ②



1028 $y^2 = -\frac{1}{x} - 1$ 에서

$$xy^2 = -1 - x$$

$$x(y^2 + 1) = -1$$

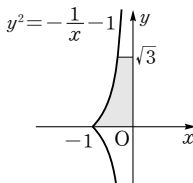
$$\therefore x = -\frac{1}{y^2 + 1}$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left| -\frac{1}{y^2 + 1} \right| dy = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2 + 1} dy$$

이 때, $y = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dy}{d\theta} = \sec^2 \theta$$



또한, $y=0$ 일 때 $\theta=0$, $y=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2 + 1} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sec^2 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

답 ④

1029 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x+x \sin x = x$ 에서

$$x \sin x = 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 $x+x \sin x \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi (x+x \sin x - x) dx \\ &= \int_0^\pi x \sin x dx \end{aligned}$$

이 때, $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, \quad g(x)=-\cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \left[-x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= \pi + \left[\sin x \right]_0^\pi = \pi \end{aligned}$$

답 ④

1030 두 곡선의 교점의 x좌표는

$\cos x = \sin x$ 에서

$$x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

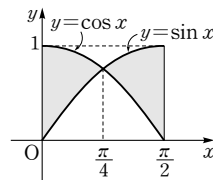
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 일 때 $\sin x \leq \cos x$

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\cos x \leq \sin x$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\ &= 2 \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

답 ②

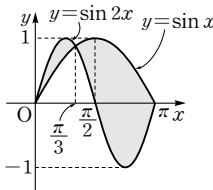


1031 두 곡선의 교점의 x좌표는

$\sin x = \sin 2x$, 즉 $\sin x = 2 \sin x \cos x$ 에서

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\pi$$



[50% 배점]

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 일 때 $\sin x \leq \sin 2x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ 일 때 $\sin 2x \leq \sin x$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

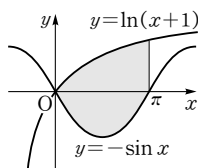
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

[50% 배점]

답 5/2

1032 주어진 부등식을 만족하는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같으므로 그 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \{ \ln(x+1) + \sin x \} dx \\ &= \int_0^{\pi} \ln(x+1) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \left[(x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^{\pi} + \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= (\pi+1) \ln(\pi+1) - \pi + 2 \end{aligned}$$



답 5

1033 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의

x좌표는 $\frac{1}{x} = x$ 에서

$$x^2 = 1 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

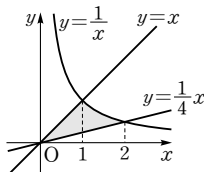
또, 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 직선 $y = \frac{1}{4}x$ 의 교점의

x좌표는 $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}x$ 에서

$$x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{4}x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{8}x^2 \right]_0^1 + \left[\ln|x| - \frac{1}{8}x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{8} + \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$



답 1

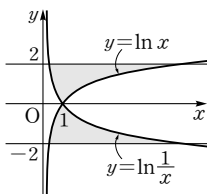
1034 $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$

$y = \ln \frac{1}{x}$ 에서 $x = e^{-y}$

$-2 \leq y \leq 0$ 일 때 $e^y \leq e^{-y}$

$0 \leq y \leq 2$ 일 때 $e^{-y} \leq e^y$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (e^{-y} - e^y) dy + \int_0^2 (e^y - e^{-y}) dy \\ &= 2 \int_0^2 (e^y - e^{-y}) dy \\ &= 2 \left[e^y + e^{-y} \right]_0^2 \\ &= 2 \left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2 \right) \end{aligned}$$

답 3

1035 $y = \frac{1}{x}$ 에서 $x = \frac{1}{y}$

$y = -\frac{1}{x}$ 에서 $x = -\frac{1}{y}$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_1^2 \left\{ \frac{1}{y} - \left(-\frac{1}{y} \right) \right\} dy \\ &= 2 \int_1^2 \frac{1}{y} dy \\ &= 2 \left[\ln|y| \right]_1^2 = 2 \ln 2 \\ S' &= \int_2^a \left\{ \frac{1}{y} - \left(-\frac{1}{y} \right) \right\} dy \\ &= 2 \int_2^a \frac{1}{y} dy \\ &= 2 \left[\ln|y| \right]_2^a \\ &= 2(\ln a - \ln 2) \\ &= 2 \ln a - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

이 때, $S' = \frac{1}{2}S$ 이므로

$$2 \ln a - 2 \ln 2 = \ln 2$$

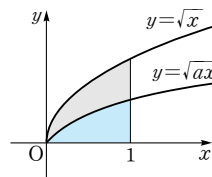
$$\ln a = \frac{3}{2} \ln 2, \quad \ln a = \ln 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore a = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

1036 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



곡선 $y = \sqrt{ax}$ 와 x축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 \sqrt{ax} dx = \left[\frac{2}{3a} \cdot (ax)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{a} \end{aligned}$$

이 때, $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로 $\frac{2}{3}\sqrt{a} = \frac{1}{3}$

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

답 3

1037 두 곡선 $y = a \cos x$, $y = \sin x$ 의 교점의 x 좌표를 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면

$$a \cos \theta = \sin \theta \text{에서}$$

$$\tan \theta = a$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 곡선 $y = a \cos x$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx = a \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a$$

$0 \leq x \leq \theta$ 에서 두 곡선 $y = a \cos x$, $y = \sin x$ 와 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\theta} (a \cos x - \sin x) dx \\ &= \left[a \sin x + \cos x \right]_0^{\theta} \\ &= a \sin \theta + \cos \theta - 1 \end{aligned}$$

이 때, $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로

$$a \sin \theta + \cos \theta - 1 = \frac{a}{2}$$

①을 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - 1 &= \frac{a}{2} \\ \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} &= \frac{a}{2} + 1, \quad \sqrt{1+a^2} = \frac{a}{2} + 1 \\ 1+a^2 &= \frac{a^2}{4} + a + 1, \quad 3a^2 - 4a = 0 \\ a(3a-4) &= 0 \quad \therefore a = \frac{4}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

답 4/3

1038 $y' = e^x$ 이므로 곡선 위의 점 (t, e^t) 에서의 접선의 방정식은 $y - e^t = e^t(x - t)$

이 직선이 원점을 지나므로 $-e^t = -te^t$

$$e^t(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1$$

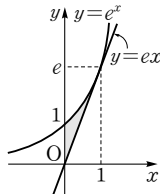
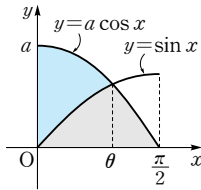
따라서 곡선 $y = e^x$ 위의 점 $(1, e)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - e = e(x - 1) \quad \therefore y = ex$$

$0 \leq x \leq 1$ 일 때 $ex \leq e^x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^1 \\ &= \left(e - \frac{1}{2}e \right) - 1 \\ &= \frac{1}{2}e - 1 \end{aligned}$$

답 ①



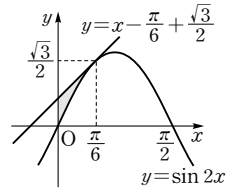
1039 $y' = 2 \cos 2x$ 이므로 곡선 위의 점 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에서의 접선의 기울기는

$$2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

따라서 곡선 위의 점 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에서

의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - \frac{\sqrt{3}}{2} &= x - \frac{\pi}{6} \\ \therefore y &= x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 일 때 $\sin 2x \leq x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ①

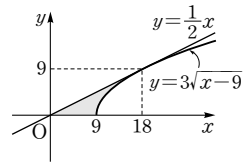
1040 $y' = \frac{3}{2\sqrt{x-9}}$ 이므로 곡선 위의 점 $(18, 9)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3}{2\sqrt{18-9}} = \frac{1}{2}$$

따라서 곡선 위의 점 $(18, 9)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - 9 &= \frac{1}{2}(x - 18) \\ \therefore y &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

[50% 배점]



구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 18 \times 9 \times \frac{1}{2} - \int_9^{18} 3\sqrt{x-9} dx \\ &= 81 - \left[3 \cdot \frac{2}{3} (x-9)^{\frac{3}{2}} \right]_9^{18} \\ &= 81 - 54 = 27 \end{aligned}$$

[50% 배점]

답 27

1041 $y' = \frac{1}{x-1}$ 이므로 곡선 위의 점 $(t, \ln(t-1))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \ln(t-1) = \frac{1}{t-1}(x-t)$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} -\ln(t-1) &= \frac{1}{t-1}(1-t) \\ \ln(t-1) &= 1 \quad \therefore t = e+1 \end{aligned}$$

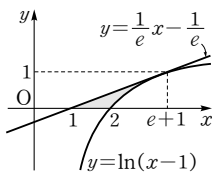
따라서 곡선 $y=\ln(x-1)$ 위의 점 $(e+1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e-1)$$

$$\therefore y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot 1 - \int_2^{e+1} \ln(x-1) dx \\ &= \frac{1}{2} e - \left[(x-1) \ln(x-1) - x \right]_2^{e+1} \\ &= \frac{1}{2} e - 1 \end{aligned}$$



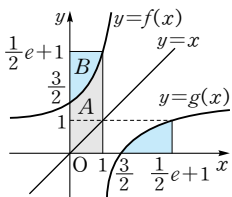
답 ①

1042 함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같

이 $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x) dx$ 의 값은 $y=f(x)$

의 그래프와 y 축 및 직선 $y=\frac{1}{2}e+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이, 즉 B와 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x) dx &= A+B \\ &= \frac{1}{2} e + 1 \end{aligned}$$

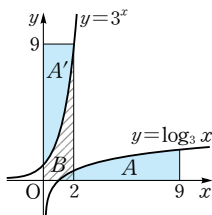


답 ③

1043 $y=\log_3 x$ 와 $y=3^x$ 은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A=A'$ 이므로

$$\begin{aligned} A+B &= A'+B \\ &= 2 \cdot 9 = 18 \end{aligned}$$



답 18

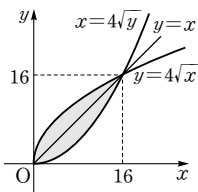
1044 $y=4\sqrt{x}$, $x=4\sqrt{y}$ 는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $y=4\sqrt{x}$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 $4\sqrt{x}=x$ 에서

$$16x=x^2, \quad x(x-16)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=16$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x) dx \\ &= 2 \left[\frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{16} \\ &= 2 \cdot \frac{128}{3} = \frac{256}{3} \end{aligned}$$



답 $\frac{256}{3}$

1045 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $y = \pm \frac{4}{3} \sqrt{9-x^2}$

따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이의 4배이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^3 \frac{4}{3} \sqrt{9-x^2} dx \\ &= \frac{16}{3} \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \end{aligned}$$

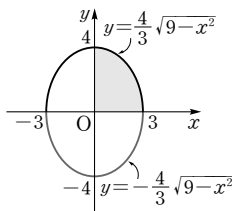
이 때, $x=3\sin\theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = 3 \cos \theta$$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=3$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1-\sin^2\theta)} \cdot 3 \cos \theta d\theta \\ &= 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 48 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 48 \cdot \frac{\pi}{4} = 12\pi \end{aligned}$$

답 ②

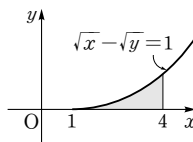


1046 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$ 에서 $\sqrt{y}=\sqrt{x}-1$

$$\therefore y=(\sqrt{x}-1)^2=x-2\sqrt{x}+1$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 (x-2\sqrt{x}+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \right]_1^4 \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$



답 ⑤

1047 주어진 타원을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동하면

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

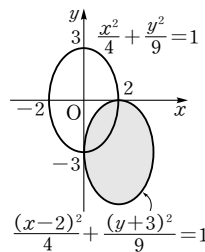
$$\therefore y = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4-x^2}$$

타원은 평행이동하여도 넓이가 변하지 않으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = 4 \int_0^2 \frac{3}{2} \sqrt{4-x^2} dx = 6 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

이 때, $x=2\sin\theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$$



또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=2$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 24 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 24 \cdot \frac{\pi}{4} = 6\pi \end{aligned}$$

답 6π

1048 $x^2+y^2=r^2$ 에서 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = [4] \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 때, $x=r\sin\theta$ ($-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=r\cos\theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=r$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1-\sin^2\theta)} \cdot r\cos\theta d\theta \\ &= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 4r^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4r^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi r^2 \end{aligned}$$

답 ③

1049 포물선과 타원의 교점의 x 좌

표는 $x^2+4\cdot\frac{3}{4}x=4$ 에서

$$\begin{aligned} x^2+3x-4 &= 0 \\ (x+4)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= 1 \quad (\because x>0) \end{aligned}$$

$$y^2=\frac{3}{4}x \text{에서} \quad y=\pm\frac{\sqrt{3x}}{2}$$

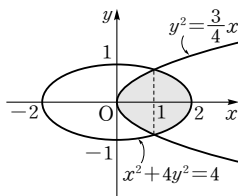
$$x^2+4y^2=4 \text{에서} \quad y=\pm\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{3x}}{2} dx + 2 \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{3x} dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx \end{aligned}$$

이 때, $x=2\sin\theta$ ($-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$



또한, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $x=2$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \sqrt{3x} dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

답 ④

1050 물의 깊이가 $\frac{\pi}{2}$ 일 때 그릇에 담긴 물의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

물의 깊이가 π 일 때 그릇에 담긴 물의 부피를 V' 이라 하면

$$\begin{aligned} V' &= \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore V'=2V$$

답 ①

1051 높이가 a 일 때 입체의 부피는 $\int_0^a x \ln(x^2+1) dx$

이 때, $x^2+1=t$ 로 놓으면 $2x\frac{dx}{dt}=1$

또한, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=a$ 일 때 $t=a^2+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a x \ln(x^2+1) dx &= \int_1^{a^2+1} \frac{1}{2} \ln t dt = \frac{1}{2} \left[t \ln t - t \right]_1^{a^2+1} \\ &= \frac{a^2+1}{2} \ln(a^2+1) - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a^2+1}{2} \ln(a^2+1) - \frac{a^2}{2} = \frac{5}{2} \ln 5 - 2$ 이고, a 는 유리수이므로

$$a^2=4 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

답 2

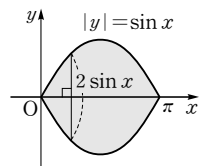
1052 $0\leq x\leq\pi$ 인 임의의 x 에 대하여 정사각형의 한 변의 길이가 $2\sin x$ 이므로 단면의 넓이는

$$(2\sin x)^2 = 4\sin^2 x$$

따라서 구하는 입체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} 4\sin^2 x dx = 4 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} (1-\cos 2x) dx = 2 \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x \right]_0^{\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

답 ④



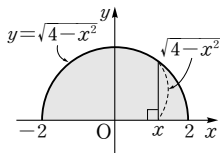
1053 주어진 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 직각을 낀 등변의 길이가 $\sqrt{4-x^2}$ 인 직각이등변삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}(\sqrt{4-x^2})^2 = \frac{1}{2}(4-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \frac{1}{2}(4-x^2) dx = \int_0^2 (4-x^2) dx \\ &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

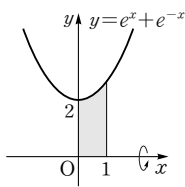
답 ②



1054 구하는 회전체의 부피를 V 라하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}e^2 + 2 - \frac{1}{2e^2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(e^2 + 4 - \frac{1}{e^2} \right) \\ \therefore a &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

답 ③

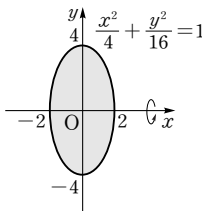


1055 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $y^2 = 16 - 4x^2$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 (16 - 4x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (16 - 4x^2) dx \\ &= 2\pi \left[16x - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= 2\pi \cdot \frac{64}{3} = \frac{128}{3}\pi \end{aligned}$$

답 ⑤



1056 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx \\ &= \pi \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

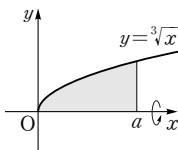
[40% 배점]

$$\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}} = \frac{96}{5}\pi \text{에서 } a^{\frac{5}{3}} = 32$$

$$\therefore a = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 8$$

[60% 배점]

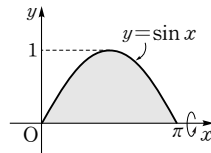
답 8



1057 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

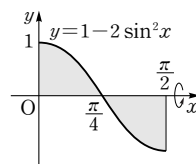
답 $\frac{\pi^2}{2}$



1058 $y = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ 이므로 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

답 ③



1059 곡선 $y = \sin x - k$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 V 라 하면

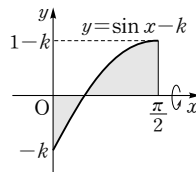
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - k)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - 2k \sin x + k^2) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2k \sin x - k^2) dx \end{aligned}$$

이므로 $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2k \sin x - k^2) dx$ 의 값이 최대일 때 V 는 최소가 된다.

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2k \sin x - k^2) dx &= \pi \left[-2k \cos x - k^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \left(-\frac{\pi}{2}k^2 + 2k \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \left(k - \frac{2}{\pi} \right)^2 + 2 \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{2}{\pi}$ 일 때 회전체의 부피는 최소가 된다.

답 ④



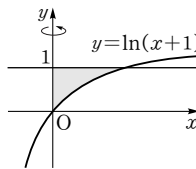
1060 $y = \ln(x+1)$ 에서 $x+1 = e^y$
 $\therefore x = e^y - 1$

구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (e^y - 1)^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 (e^{2y} - 2e^y + 1) dy = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y} - 2e^y + y \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\left(\frac{1}{2}e^2 - 2e + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right) = \frac{\pi}{2} (e^2 - 4e + 5) \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-4$, $c=5$ 이므로 $a+b+c=3$

답 ③

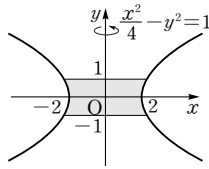


1061 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 에서

$$x^2 = 4y^2 + 4$$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (4y^2 + 4) dy \\ &= 4\pi \int_{-1}^1 (y^2 + 1) dy \\ &= 8\pi \int_0^1 (y^2 + 1) dy \\ &= 8\pi \left[\frac{1}{3}y^3 + y \right]_0^1 \\ &= 8\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$



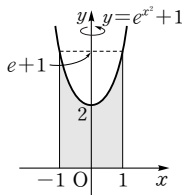
답 ⑤

1062 $y = e^{x^2} + 1$ 에서 $e^{x^2} = y - 1$

$$\therefore x^2 = \ln(y - 1)$$

구하는 회전체의 부피는 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 $e+1$ 인 원기둥의 부피에서 곡선 $y = e^{x^2} + 1$ 과 직선 $y = e+1$ 로 둘러싸인 부분을 y 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot 1^2 \cdot (e+1) - \pi \int_2^{e+1} \ln(y-1) dy \\ &= \pi(e+1) - \pi \left[(y-1)\ln(y-1) - y \right]_2^{e+1} \\ &= \pi(e+1) - \pi \cdot 1 = e\pi \end{aligned}$$



답 ④

1063 V_x 는 반지름의 길이가 1인 구의 부피이므로

$$V_x = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \text{에서}$$

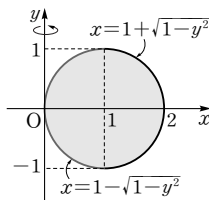
$$x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$

따라서 V_y 는 $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$ 을 y 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피에서 $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$ 을 y 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_{-1}^1 \{ (1 + \sqrt{1-y^2})^2 - (1 - \sqrt{1-y^2})^2 \} dy \\ &= \pi \int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2} dy \\ &= 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy \end{aligned}$$

이 때, $y = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$$



또한, $y = -1$ 일 때 $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $y = 1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 이므로

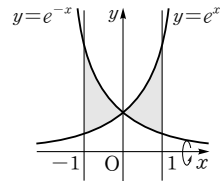
$$\begin{aligned} V_y &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 \\ \therefore \frac{V_y}{V_x} &= \frac{2\pi^2}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

답 ④

1064 구하는 회전체의 부피는 두 곡선 $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 과 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피의 2배와 같으므로 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \int_0^1 \{ (e^x)^2 - (e^{-x})^2 \} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x}) dx = 2\pi \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - 1 \right) \\ &= \pi \left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2 \right) \end{aligned}$$

답 ①



1065 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$\cos x = \sin 2x \text{에서}$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\sin x - 1) = 0$$

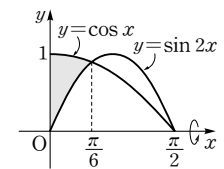
$$\cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 2x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x + \cos 4x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi \end{aligned}$$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$



1066 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는 $x+2\sin x=x$ 에서

$$\sin x=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi$$

$$(\because 0 \leq x \leq \pi)$$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$V=\pi \int_0^{\pi} \{(x+2\sin x)^2-x^2\} dx$$

$$=\pi \int_0^{\pi} (4x\sin x+4\sin^2 x) dx$$

$$=4\pi \int_0^{\pi} x\sin x dx+\pi \int_0^{\pi} 2(1-\cos 2x) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 때, $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=-\cos x$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x\sin x dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx$$

$$=\pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \pi$$

이것을 ①에 대입하면

$$V=4\pi \cdot \pi + \pi \int_0^{\pi} 2(1-\cos 2x) dx$$

$$=4\pi^2 + \pi \left[2x - \sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=4\pi^2 + \pi \cdot 2\pi = 6\pi^2$$

답 ④

1067 $y=e^{x^2}$ 에서 $x^2=\ln y$

$y=e^{2x^2}$ 에서 $2x^2=\ln y$

$$\therefore x^2=\frac{1}{2}\ln y$$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$V=\pi \int_e^{e^2} \left(\ln y - \frac{1}{2}\ln y\right) dy$$

$$=\frac{\pi}{2} \int_e^{e^2} \ln y dy$$

$$=\frac{\pi}{2} \left[y\ln y - y\right]_e^{e^2}$$

$$=\frac{\pi}{2} \cdot e^2 = \frac{e^2}{2}\pi$$

답 ②

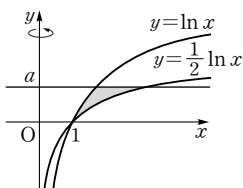
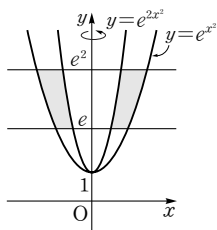
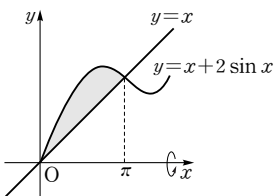
1068 $y=\frac{1}{2}\ln x$ 에서 $\ln x=2y$

$$x=e^{2y} \quad \therefore x^2=e^{4y}$$

$y=\ln x$ 에서 $x=e^y$

$$\therefore x^2=e^{2y}$$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a (e^{4y} - e^{2y}) dy = \pi \left[\frac{1}{4} e^{4y} - \frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^a \\ &= \pi \left(\frac{1}{4} e^{4a} - \frac{1}{2} e^{2a} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (e^{4a} - 2e^{2a} + 1) \\ &= \frac{\pi}{4} (e^{2a} - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4} (e^{2a} - 1)^2 = \frac{\pi}{4} (e^4 - 1)^2 \text{에서}$$

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

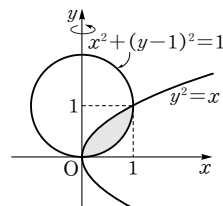
답 2

1069 두 곡선 $x^2+(y-1)^2=1$, $y^2=x$ 의 교점의 y 좌표는 $y^4+(y-1)^2=1$ 에서

$$y(y-1)(y^2+y+2)=0$$

$$\therefore y=0 \text{ 또는 } y=1$$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 점 (x, y) 의 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면



$$V=\pi \int_0^1 \{[1-(y-1)^2] - (y^2)^2\} dy$$

$$=\pi \int_0^1 (2y - y^2 - y^4) dy$$

$$=\pi \left[y^2 - \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^1 = \frac{7}{15} \pi$$

따라서 $m=15$, $n=7$ 이므로

$$m+n=22$$

답 22

1070 $y'=2e^x$ 이므로 곡선 위의 점

$(0, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-2=2(x-0)$$

$$\therefore y=2x+2$$

이 때, 접선의 x 절편이 -1 이므로

$$a=-1$$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$V=\pi \int_{-1}^0 \{(2e^x)^2 - (2x+2)^2\} dx$$

$$=\pi \int_{-1}^0 (4e^{2x} - 4x^2 - 8x - 4) dx$$

$$=4\pi \int_{-1}^0 (e^{2x} - x^2 - 2x - 1) dx$$

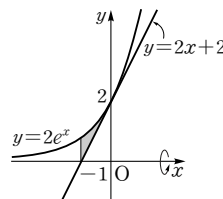
$$=4\pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{3} x^3 - x^2 - x \right]_{-1}^0$$

$$=4\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2e^2} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{e^2} \right)$$

답 ①

1071 $y'=\frac{1}{x}$ 이므로 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 접선의 방정

$$\text{식은 } y - \ln t = \frac{1}{t} (x - t)$$



이 직선이 원점을 지나므로 $-\ln t = -1$

$$\ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

따라서 곡선 위의 점 $(e, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$\therefore y = \frac{1}{e}x$$

$$y = \ln x \text{에서} \quad x = e^y$$

$$y = \frac{1}{e}x \text{에서} \quad x = ey$$

이므로 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

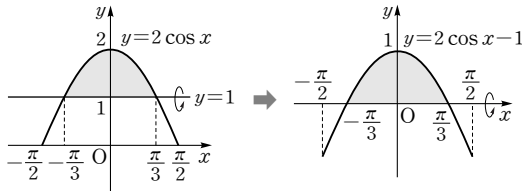
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \{(e^y)^2 - (ey)^2\} dy \\ &= \pi \int_0^1 (e^{2y} - e^2 y^2) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} - \frac{e^2}{3} y^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{3} \right) = \frac{\pi}{6} (e^2 - 3) \end{aligned}$$

답 ③

1072 $2\cos x = 1$ 에서 $\cos x = \frac{1}{2}$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3} \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

곡선 $y = 2\cos x$ 와 직선 $y = 1$ 을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 각각 곡선 $y = 2\cos x - 1$ 과 $y = 0$ 이 된다.



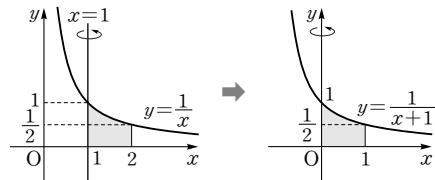
따라서 구하는 회전체의 부피는 곡선 $y = 2\cos x - 1$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피와 같으므로 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2\cos x - 1)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/3} (4\cos^2 x - 4\cos x + 1) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/3} \left(4 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} - 4\cos x + 1 \right) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/3} (2\cos 2x - 4\cos x + 3) dx \\ &= 2\pi \left[\sin 2x - 4\sin x + 3x \right]_0^{\pi/3} \\ &= 2\pi \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \pi \right) = \pi(2\pi - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

답 ④

1073 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 두 직선 $x = 1, x = 2$ 를 x 축의 방향으로 -1

만큼 평행이동하면 각각 곡선 $y = \frac{1}{x+1}$ 과 $x = 0, x = 1$ 이 된다.



따라서 구하는 회전체의 부피는 곡선 $y = \frac{1}{x+1}$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분을 y 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피와 같다.

이 때, $y = \frac{1}{x+1}$ 에서 $x = \frac{1}{y} - 1$ 이므로 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1 \right)^2 dy + \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} + 1 \right) dy + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \left[-\frac{1}{y} - 2\ln|y| + y \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2 \right) + \frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi(1 - \ln 2) \end{aligned}$$

답 ②

1074 비행기가 착륙해서 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 \left| 5 \left(1 - \sin \frac{\pi}{10} t \right) \right| dt &= \int_0^5 5 \left(1 - \sin \frac{\pi}{10} t \right) dt \\ &= 5 \left[t + \frac{10}{\pi} \cos \frac{\pi}{10} t \right]_0^5 \\ &= 5 \left(5 - \frac{10}{\pi} \right) \\ &= 25 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \end{aligned}$$

답 25(1 - 2/π)

1075 원점에서 출발하였으므로 $t = 2$ 일 때의 점 P 의 위치를 x 라 하면

$$x = 0 + \int_0^2 (t-1)e^t dt = \int_0^2 (t-1)e^t dt$$

이 때, $f(t) = t-1, g'(t) = e^t$ 으로 놓으면

$$f'(t) = 1, g(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 (t-1)e^t dt &= \left[(t-1)e^t \right]_0^2 - \int_0^2 e^t dt \\ &= (e^2 + 1) - \left[e^t \right]_0^2 \\ &= (e^2 + 1) - (e^2 - 1) = 2 \end{aligned}$$

답 ①

1076 2초 후의 수면의 높이는 $\int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt$ [40% 배점]

이 때, $t=2 \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{d\theta} = 2 \sec^2 \theta$$

또한, $t=0$ 일 때 $\theta=0$, $t=2$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(\tan^2 \theta + 1)} \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \sec^2 \theta} \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

[60% 배점]

답 $\frac{\pi}{8}$

1077 원점에서 출발하였으므로 위치의 변화량이 0이면 점 P의 위치가 원점이다.

$t=a$ ($0 < a < 2\pi$)일 때 점 P의 위치의 변화량이 0이라 하면

$$\int_0^a \cos \pi t dt = 0, \quad \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^a = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \sin a\pi = 0, \quad \sin a\pi = 0$$

$$\therefore a=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

따라서 점 P는 원점을 6번 지난다.

답 ③

1078 $\frac{dx}{dt} = \cos t - \sin t$, $\frac{dy}{dt} = -\sin t - \cos t$

이므로 $t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\pi \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (-\sin t - \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \left[\sqrt{2} t \right]_0^\pi \\ &= \sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

답 ②

1079 $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$ [40% 배점]

이므로 $t=\frac{1}{2}$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1} dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t^2} + 1\right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} + t \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

[60% 배점]

답 $\frac{3}{2}$

1080 $\frac{dx}{dt} = t-2$, $\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{2t}$

$t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{(t-2)^2 + (2\sqrt{2t})^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{t^2 + 4t + 4} dt = \int_0^a \sqrt{(t+2)^2} dt \\ &= \int_0^a (t+2) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 + 2t \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} a^2 + 2a \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} a^2 + 2a = 6 \text{에서} \quad a^2 + 4a - 12 = 0$$

$$(a-2)(a+6) = 0 \quad \therefore a=2 \quad (\because a > 0)$$

답 ①

1081 $\frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi \sqrt{e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 + e^{2t} (\cos t - \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}} dt = \int_0^\pi \sqrt{2} e^t dt \\ &= \left[\sqrt{2} e^t \right]_0^\pi = \sqrt{2} (e^\pi - 1) \end{aligned}$$

답 ①

1082 $\frac{dx}{dt} = 6 \cos^2 t \cdot (-\sin t)$, $\frac{dy}{dt} = 6 \sin^2 t \cdot \cos t$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36 \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin t \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= 3 \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 \end{aligned}$$

답 3

1083 $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_0^3 \sqrt{1 + (2x\sqrt{x^2+1})^2} dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{(2x^2+1)^2} dx \\ &= \int_0^3 (2x^2+1) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

답 21

1084 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로 구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

답 ①

1085 $\alpha = \int_0^p f(x) dx$, $\beta = -\int_p^{2p^2} f(x) dx$

$$2x^2 = t \text{로 놓으면} \quad 4x \frac{dx}{dt} = 1$$

또한, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=p$ 일 때 $t=2p^2$ 이므로

$$\int_0^p x f(2x^2) dx = \int_0^{2p^2} f(t) \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int_0^{2p^2} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^p f(t) dt + \int_p^{2p^2} f(t) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^p f(x) dx + \int_p^{2p^2} f(x) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{4} (\alpha - \beta)$$

답 ⑤

1086 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 이므로
 $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \quad \therefore y = (1 - \sqrt{x})^2$

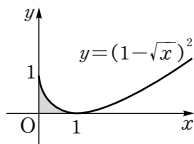
이 때, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx$$

$$= \left[x - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



답 ②

1087 $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ 이므로

$$\beta = \int_p^q \log_b x dx = \frac{1}{\ln b} \int_p^q \ln x dx = \frac{1}{\ln b} \left[x \ln x - x \right]_p^q$$

$$= \frac{1}{\ln b} (q \ln q - q - p \ln p + p) \quad \dots\dots ㉠$$

또, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \int_p^q \log_a x dx = \frac{1}{\ln a} \int_p^q \ln x dx = \frac{1}{\ln a} \left[x \ln x - x \right]_p^q$$

$$= \frac{1}{\ln a} (q \ln q - q - p \ln p + p) \quad \dots\dots ㉡$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면 $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\ln b}{\ln a}$

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \log_a b \quad \therefore \frac{\alpha}{\beta} = \log_a b - 1$$

답 ③

1088 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 에서 $0 < \sin^2 x < \frac{1}{4}$ 이므로

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$

따라서 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x dx = \pi \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$

답 ①

1089 점 C의 좌표를 $(k, 0)$ 이라 하면 $-3 < k < 3$ 이고,

CD=3-k이므로 어두운 부분을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$V = \pi \int_k^3 (9 - x^2) dx - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3-k}{2} \right)^3$$

$$= \pi \left[9x - \frac{1}{3} x^3 \right]_k^3 - \frac{4}{3} \pi \times \frac{(3-k)^3}{8}$$

$$= \pi \left(18 - 9k + \frac{1}{3} k^3 \right) - \frac{\pi}{6} (3-k)^3$$

$$= \frac{\pi}{2} (k^3 - 3k^2 - 9k + 27) = \frac{\pi}{2} (k-3)^2 (k+3)$$

$$\frac{dV}{dk} = \pi(k-3)(k+3) + \frac{\pi}{2} (k-3)^2 = \frac{3}{2} \pi (k-3)(k+1)$$

이므로 $\frac{dV}{dk} = 0$ 에서

$$k=3 \text{ 또는 } k=-1$$

따라서 오른쪽 표에서 V 는

$k=-1$ 일 때 극대이면서 최대

이므로 구하는 최대값은

$$\frac{\pi}{2} (-1-3)^2 (-1+3) = 16\pi$$

답 ⑤

k	$\dots$	-1	$\dots$	3
$\frac{dV}{dk}$	$+$	0	$-$	0
V	$\nearrow$		$\searrow$	

1090 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})$$

$$= (x, y) \cdot (x, y-2)$$

$$= x^2 + y^2 - 2y$$

이므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} \leq 0$ 에서 $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.

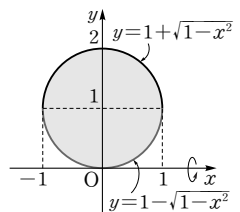
$x^2 + (y-1)^2 = 1$ 에서

$$y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$$

이므로 구하는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$V = \pi \int_{-1}^1 \{ (1 + \sqrt{1-x^2})^2 - (1 - \sqrt{1-x^2})^2 \} dx$$

$$= \pi \int_{-1}^1 4\sqrt{1-x^2} dx = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$



이 때, $x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} 8\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 8\pi \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi^2 \end{aligned}$$

답 ⑤

1091 $y=3x^2$ 에서 $x^2=\frac{1}{3}y$

$y=x^2$ 에서 $x^2=y$

처음 회전체 A에 차 있던 물의 양을 a 라 하면

$$\begin{aligned} a &= \pi \int_0^u \frac{1}{3}y dy + \pi \left(\int_0^v y dy - \int_0^v \frac{1}{3}y dy \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^u + \frac{2}{3}\pi \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^v \\ &= \frac{\pi}{6}u^2 + \frac{\pi}{3}v^2 \end{aligned}$$

양변을 u 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi}{3}u + \frac{2}{3}\pi v \frac{dv}{du} \\ \therefore \frac{dv}{du} &= -\frac{u}{2v} \end{aligned}$$

$v=\frac{1}{2}u$ 를 대입하면

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{u} = -1$$

답 ②

1092 $\neg$. $0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 점 P는

$t=\frac{4}{3}\pi$ 일 때 한 번 운동 방향을 바꾼다.

ㄴ. $t=\frac{4}{3}\pi$ 일 때 운동 방향을 바꾸므

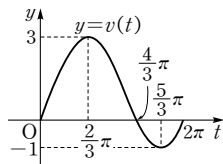
로 $t=\frac{4}{3}\pi$ 일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

ㄷ. $t=2\pi$ 일 때 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[2\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) + 1 \right] dt &= \left[-2\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right) + t \right]_0^{2\pi} \\ &= (-\sqrt{3}+2\pi) - (-\sqrt{3}) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

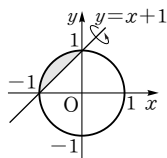
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

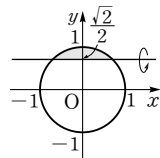


1093 다음 그림과 같이 x 축이 회전축이 되도록 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=x+1$ 을 이동하면 구하는 부피는 [그림 3]에서 원

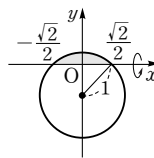
$x^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피와 같다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

$x^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$ 에서

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{1-x^2}$$

따라서 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1-x^2 - \sqrt{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) dx - 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

이 때, $x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

또한, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) dx - 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{6}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{5\sqrt{2}}{6}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로

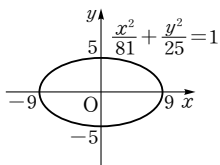
$$\frac{b}{a} = -\frac{3}{10}$$

답 ②

1094 터널의 단면을 나타내는 도형은 장축과 단축의 길이가 각각 18, 10인 타원이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 타원의 중심이 원점에 오도록 좌표축을 도입하면 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$$



$$\therefore y = \pm 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{81}}$$

즉, 타원의 윗부분을 나타내는 식은

$$y = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{81}}$$

이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5 \cdot \frac{-\frac{2}{81}x}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{81}}} \\ &= -\frac{25x}{81y} \end{aligned}$$

따라서 터널의 단면을 나타내는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$l = 2 \int_0^9 \sqrt{1 + \left(-\frac{25x}{81y}\right)^2} dx$$

이므로 방수 포장을 해야 하는 부분의 넓이는

$$680l = 1360 \int_0^9 \sqrt{1 + \left(\frac{25x}{81y}\right)^2} dx$$

답 ④

1095 $f(x) = ke^{x-1}$, $g(x) = 4x$ 로 놓으면

$$f'(x) = ke^{x-1}, g'(x) = 4$$

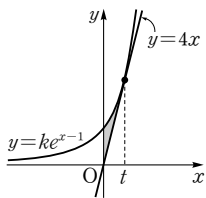
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서}$$

$$ke^{t-1} = 4t \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$ke^{t-1} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$



[40% 배점]

①, ②를 연립하여 풀면

$$t = 1, k = 4$$

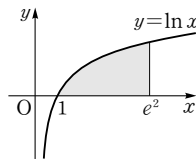
따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (4e^{x-1} - 4x) dx \\ &= \left[4e^{x-1} - 2x^2 \right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{4}{e} \end{aligned}$$

[30% 배점]

답 $2 - \frac{4}{e}$

1096 곡선 $y = \ln x$ 와 x 축 및 직선 $x = e^2$ 으로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 270° 만큼 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 V 라 하면



$$V = \frac{3}{4}\pi \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx \quad [30\% \text{ 배점}]$$

이 때, $f(x) = (\ln x)^2$, $g'(x) = 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}, g(x) = x$$

$$\therefore V = \frac{3}{4}\pi \left\{ \left[x(\ln x)^2 \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\ln x dx \right\}$$

$$= \frac{3}{4}\pi \left(4e^2 - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx \right)$$

[40% 배점]

또, $h(x) = \ln x$, $k'(x) = 1$ 로 놓으면

$$h'(x) = \frac{1}{x}, k(x) = x$$

$$\therefore V = 3\pi e^2 - \frac{3}{2}\pi \left\{ \left[x \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1 dx \right\}$$

$$= 3\pi e^2 - \frac{3}{2}\pi \left(2e^2 - \left[x \right]_1^{e^2} \right)$$

$$= 3\pi e^2 - \frac{3}{2}\pi (e^2 + 1)$$

$$= \frac{3}{2}\pi (e^2 - 1)$$

[30% 배점]

답 $\frac{3}{2}\pi(e^2 - 1)$

1097 $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$ 이므로

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos t)} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \end{aligned}$$

[50% 배점]

따라서 $|\vec{v}|$ 는 $\left| \sin \frac{t}{2} \right| = 1$ 일 때, 즉 $t = \pi$ 일 때 최대이므로 $t = 0$

에서 $t = \pi$ 일 때까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4$$

[50% 배점]

답 4